

Les enjeux de l'apprentissage de la numération : nombres entiers, fractions et décimaux

Nos choix pour...

Les nombres sont utilisés pour exprimer des quantités, puis des grandeurs (longueurs, masses...) par dénombrement d'unités choisies. Pour une quantité importante, les groupements par dizaines, centaines, milliers, millions puis milliards permettent d'obtenir rapidement l'écriture en chiffres du nombre entier. Le fractionnement de l'unité en parts égales donne sens à l'écriture fractionnaire d'autres nombres (les fractions et les décimaux) qui permettent d'exprimer des mesures non entières de quantités ou de grandeurs.

Au CM2, les élèves consolident leurs connaissances acquises au cycle 2 et au CM1 relatives aux **nombres entiers** inférieurs ou égaux au million et ils les prolongent **jusqu'au milliard** :

- Ils utilisent et représentent ces nombres et savent les écrire sous la dictée ou lire leur écriture chiffrée.
- Ils connaissent les unités de la numération décimale (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions, milliards) et les relations qui les lient.
- Ils comprennent la signification des chiffres ou des groupements de chiffres dans leur écriture chiffrée (jusqu'à 12 chiffres).
- Ils les comparent, les rangent, les encadrent, les repèrent et les placent sur une demi-droite graduée adaptée.

L'étude des **nombres décimaux** engagée au CM1 se poursuit au CM2. Les élèves renforcent leurs connaissances en effectuant les mêmes tâches sur les unités de numération (dixièmes, centièmes et à présent millièmes) construites à partir du fractionnement de l'unité. Ils connaissent et emploient **diverses désignations orales et écrites** d'un nombre décimal (fractions décimales, écritures à virgule, décompositions additives et multiplicatives). Ils les utilisent pour **rendre compte de mesures de grandeurs** et connaissent **le lien entre les unités de numération et les unités conventionnelles de mesure** (par exemple : lien entre dixième et déci- dans dm/dg/dL, entre centième et centi- dans cm/cg/cL/centimes d'euro). Ils trouvent des nombres décimaux à **intercaler** entre deux nombres donnés.

Dans le cadre de partages de grandeurs ou de mesures de grandeurs, ils utilisent des **fractions simples**, et des **fractions décimales** (jusqu'au millième) qui acquièrent ainsi progressivement le statut de nombres.

- Ils font le lien entre leur formulation en langage courant et leur expression mathématique.
- Ils les décomposent sous forme additive et multiplicative., notamment en unités de numération.
- Ils les positionnent sur une ligne graduée, les encadrent par deux entiers successifs et les décomposent sous forme de somme dont un terme est leur partie entière.
- Ils comparent des fractions décimales de même dénominateur.
- ils connaissent des égalités entre des fractions usuelles (comme $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$; $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$) ainsi que des égalités entre quelques fractions et des écritures décimales comme $\frac{1}{2} = 0,5$ ou $\frac{1}{4} = 0,25$.

■ Numération décimale

Notre système d'expression des nombres entiers en chiffres possède 2 caractéristiques dont la maîtrise est essentielle pour comprendre et apprendre les notions relatives aux nombres, aux calculs et à la mesure :

– **Ce système est positionnel** : la valeur d'un chiffre est déterminée par sa place par rapport à l'unité dans l'écriture du nombre.

Pour 1 325, le 3 se situe au 3^e rang vers la gauche en partant de l'unité, il représente donc 3 centaines.

– **Ce système est décimal** : les différentes unités de numération¹ sont liées entre elles par des relations qui correspondent à des groupements par 10. Ainsi,

- 1 dizaine = 10 unités ;
 - 1 centaine = 10 dizaines
- et donc 1 centaine = 100 unités ;
- 1 millier = 10 centaines
- et donc 1 millier = 1 000 unités.

L'expression des grands nombres est organisée par classe de trois unités de numérations construites sur le même modèle,

part, les différentes unités du système (unité, dizaine, centaine, millier, million). On parle alors *d'unités de numération*.

¹ Le mot *unité* a plusieurs significations. Il désigne d'une part la valeur choisie comme unitaire (ce qui sera le « un » : *une unité simple* dans cent-vingt-cinq, *un million* dans cent-vingt-cinq millions), et, d'autre

sur la base de groupements auxiliaires par 1 000 (milliers, millions, milliards...).

milliards			millions			milliers			unités simples		
centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités
							4	0	7	6	3
								40	7	6	3
									407	6	3

Ces unités de numération permettent d'exprimer des **quantités ou des grandeurs** (8 millions d'habitants, 3 mille kilomètres...). Elles permettent également d'exprimer des nombres sous diverses formes : 4 dizaines de milliers 7 centaines 6 dizaines 3 unités ou 40 milliers 763 unités ou 407 centaines et 63 unités... et les relations entre elles sont utiles aux conversions : 4 dizaines de milliers et 763 unités = 40 milliers et 763 unités – **Ce système se prolonge aux nombres décimaux** en introduisant de nouvelles unités

de numération (dixièmes, centièmes, millièmes...) issues du partage de l'unité en 10, 100 ou 1 000 parties égales et liées également entre elles par des relations décimales comme : 1 unité = 10 dixièmes ; 1 dixième = 10 centièmes ; 1 centième = 10 millièmes et donc 1 unité = 100 centièmes = 1 000 millièmes. Les nombres décimaux peuvent être exprimés à l'aide de fractions décimales ou à l'aide d'écritures décimales en utilisant une virgule (voir le paragraphe Représentation des nombres ci-après).

millions			milliers			unités simples					
centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités	centaines (100)	dizaines (10)	unités (1)	dixièmes ($\frac{1}{10}$)	centièmes ($\frac{1}{100}$)	millièmes ($\frac{1}{1000}$)
							4	0	7	6	3

Dans l'écriture à virgule, la valeur d'un chiffre est, comme pour les entiers, déterminée par le rang qu'il occupe dans l'écriture chiffrée (le chiffre 6 vaut 6 dizaines dans 40 763 et il vaut 6 centièmes dans 40,763). **Il en est de même pour celle des groupements de chiffres** (40 vaut 40 milliers dans 40 763 et il vaut 40 unités dans 40,763).

La **différence principale** réside dans le fait que pour les nombres entiers, le chiffre des unités est le chiffre le plus à droite (c'est 3 dans 40 703) alors que pour les nombres décimaux (non entiers) le chiffre des unités est signalé par la virgule : c'est le chiffre situé immédiatement à gauche de la virgule (c'est 0 dans 40,763). À cet égard, il faut insister sur le rôle de la virgule. Contrairement à ce qui est fréquemment exprimé, **la virgule n'est pas un « séparateur »** : elle ne sépare pas la partie entière de la partie décimale.

Exemple : Si pour **40,763** la partie entière est bien **40**, la partie décimale n'est pas 763, mais **0,763** et 40,763 est égal à la somme de sa partie entière et de sa partie décimale : $40,763 = 40 + 0,763$.

Il est plus correct d'affirmer que **la virgule est « un indicateur »** : elle indique quel est le

chiffre des unités et, à partir de là, permet de trouver la valeur de tous les autres chiffres.

Un autre enjeu réside dans **l'apprentissage de la désignation verbale des nombres (orale et écrite en lettres)** et de ses liens avec la désignation en chiffres. Ainsi, l'écriture chiffrée des grands nombres, en groupes espacés de 3 chiffres à partir de la droite, fournit une aide à cette verbalisation. De même une lecture signifiante des écritures à virgule (une unité et deux centièmes ou cent-deux centièmes pour 1,02) rappelle et ancre leur nature décimale.

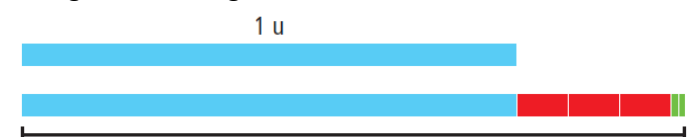
■ Les représentations des nombres

Pour représenter un nombre plusieurs registres peuvent être utilisés.

Exemple avec le nombre 1,32.

• Registres figurés

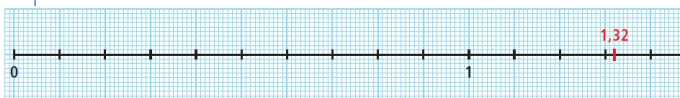
– Registre des longueurs



La longueur du segment est obtenue en mettant bout à bout :

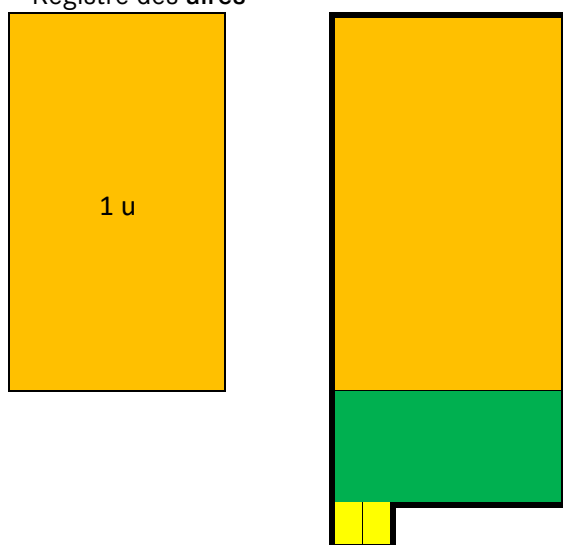
1 segment de longueur 1 u, 3 segments de longueur $\frac{1}{10}$ u et 2 segments de longueur $\frac{1}{100}$ u.

– Registre des **lignes graduées**



La longueur du segment qui sépare les repères 0 et 1 est égale à 1 u.
Le repère associé à 1,32 se trouve à 3 dixièmes et 2 centièmes après 1. Il indique que la longueur du segment qui a pour extrémités les repères 0 et 1,32 est 1,32 u.

– Registre des **aires**²



L'aire de la surface est obtenue en accolant :
1 surface d'aire 1 u, 3 surfaces d'aire $\frac{1}{10}$ u et
2 surfaces d'aire $\frac{1}{100}$ u.

• **Registres verbaux**

Expressions signifiantes : 1 et 3 dixièmes et 2 centièmes ou 1 et 32 centièmes ou 132 centièmes.

La formulation 1 virgule 32 contribue à ce que l'élève conçoive le nombre décimal comme la juxtaposition de deux entiers ce qui génère de nombreuses erreurs dans les exercices de comparaison ou de calcul. Son usage doit être donc limité (voire prohibé au CM) et les lectures signifiantes privilégiées.

• **Registres symboliques**

Écritures : 1,32 associée à $1 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100}$
ou $1 + \frac{32}{100}$ ou $\frac{132}{100}$

➤ La progression de Cap Math CM2, comme celle du CM1, construit en permanence des ponts entre ces différents registres pour aider les élèves à une meilleure conceptualisation des nombres.

■ **La comparaison des nombres en écriture décimale**

On enseigne souvent deux procédures différentes pour la comparaison des nombres entiers et pour celle des nombres décimaux. Nous avons, au contraire, choisi une procédure plus simple, valable pour ces deux types de nombres et qui peut être expliquée et comprise facilement à partir des connaissances des élèves relatives à la numération décimale.

Exemples

$2\ 016 > 203$ → parce que 2 016 comporte des milliers alors que 203 n'en comporte pas.

$20,16 < 20,3$ → parce que 20,16 et 20,3 comportent le même nombre de dizaines et d'unités, mais que 20,16 comporte moins de dixièmes que 20,3 (et que 6 centièmes c'est moins que 1 dixième).

Dans tous les cas, il s'agit de parcourir les écritures chiffrées des deux nombres à partir du chiffre de rang le plus élevé (donc à partir de la gauche) et de conclure dès qu'apparaissent deux chiffres différents à un même rang (203 ne comportant pas de millier peut être considéré comme 0 203). La question de la longueur des écritures (même si elle peut devenir une règle commode pour les nombres entiers) ou encore de la distinction entre parties à gauche et à droite de la virgule (pour les nombres décimaux) n'intervient donc pas. Seule la valeur positionnelle des chiffres est utilisée dans ces deux domaines numériques.

La différence essentielle entre nombres entiers et nombres décimaux concerne la question de l'intercalation de nombres entre deux nombres donnés. Entre deux nombres entiers,

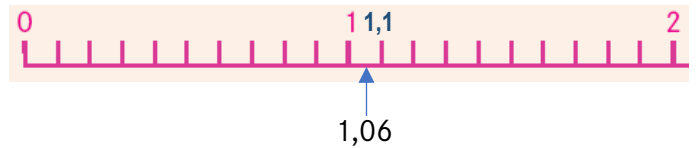
² Pour les nombres comportant des centièmes ou des millièmes, il est souvent plus simple de se placer dans le registre des aires dans lequel les millièmes sont plus « visibles ».

il existe un nombre limité de nombres entiers (aucun si les deux nombres sont consécutifs) alors qu'entre deux nombres décimaux on peut toujours intercaler une infinité d'autres nombres décimaux. La notion de nombres décimaux consécutifs n'a pas de sens.

Le travail sur des lignes graduées ou sur le matériel « surfaces » fourni dans la mallette permet de renforcer la maîtrise de la comparaison des nombres et des questions liées à l'intercalation.

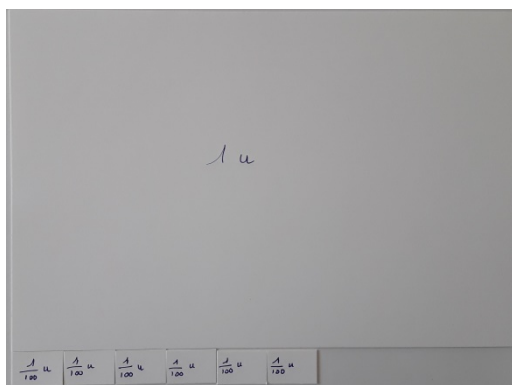
Exemple 1 :

Placer approximativement 1,06 sur une ligne graduée en dixièmes nécessite d'effectuer deux comparaisons pour intercaler ce nombre entre 1 et 1,1 : $1 < 1,06 < 1,1$.

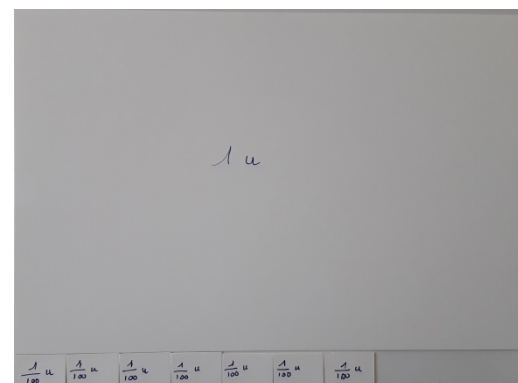


Exemple 2 :

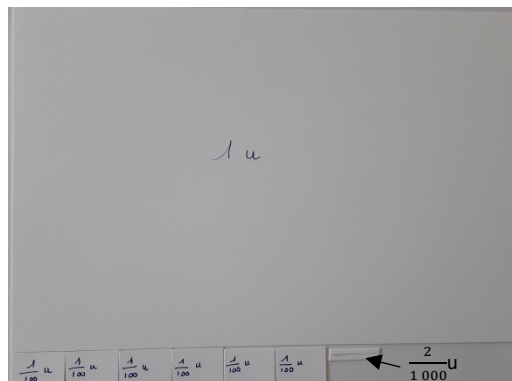
Construire une surface dont l'aire est comprise entre 1,06 u et 1,07 u.



1,06 u



1,07 u



1,062 u

■ Les changements d'unités

La nature décimale de notre système de numération de position qui régit l'écriture chiffrée des nombres entiers et à virgule des nombres décimaux permet d'effectuer simplement des conversions entre unités de numération et d'exprimer des quantités de différentes manières, ainsi :

287 500 habitants = $2\ 875 \times 100$ habitants
 = 2 875 centaines d'habitants
 = $287,5 \times 1\ 000$ habitants
 = 287,5 milliers d'habitants.

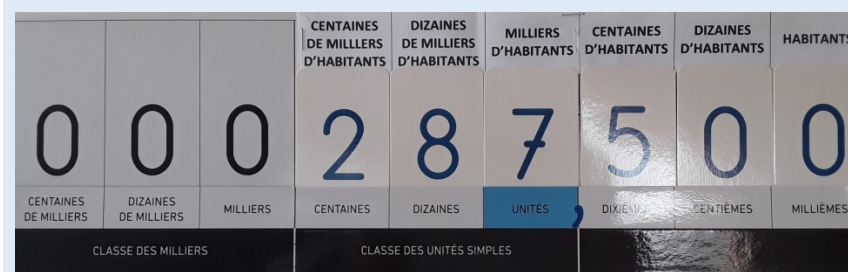
Ces changements d'unités peuvent être illustrés par des glissements de chiffres dans un « glisse-nombre » en mettant en correspondance les unités de numération avec un système d'unités similaire exprimés en nombre d'habitants.



L'habitant est l'unité (on place HABITANTS à la hauteur d'UNITÉS sur le glisse-nombre).



La centaine d'habitants est l'unité (on place CENTAINES D'HABITANTS à la hauteur d'UNITÉS sur le glisse-nombre, en entraînant dans le même mouvement tous les chiffres qui composent le nombre).



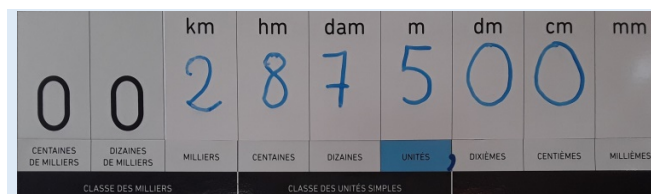
Le millier d'habitants est l'unité (on place MILLIERS D'HABITANTS à la hauteur d'UNITÉS sur le glisse-nombre, en entraînant dans le même mouvement tous les chiffres qui composent le nombre).

Les unités de longueur, de masse et de contenance du Système international de mesure sont elles aussi organisées selon une relation décimale qui permet d'effectuer facilement des changements d'unités, ainsi :
 $287\,500\text{ cm} = 2\,875 \times 100\text{ cm} = 2\,875\text{ m}$
 $= 2,875 \times 1\,000\text{ m} = 2,875\text{ km}$.

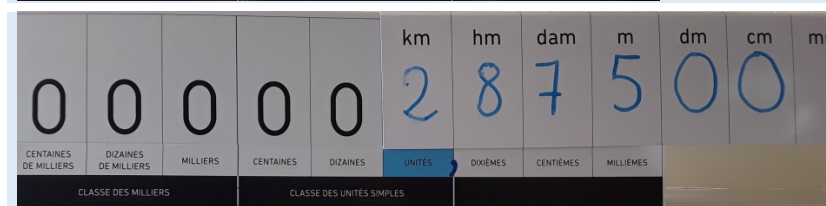
De la même manière que les changements d'unités de numération, les conversions entre unités d'une même de ces grandeurs peuvent être illustrées à l'aide d'un « glisse-mesure » mobile posé sur un glisse-nombre.



Le centimètre est l'unité (on place **cm** à la hauteur d'UNITÉS sur le glisse-nombre).



Le mètre est l'unité (on place **m** à la hauteur d'UNITÉS sur le glisse-nombre, en entraînant dans le même mouvement tous les chiffres qui composent le nombre).



Le kilomètre est l'unité (on place **km** à la hauteur d'UNITÉS sur le glisse-nombre, en entraînant dans le même mouvement tous les chiffres qui composent le nombre).

■ L'apprentissage des fractions au CM2

L'enjeu principal de l'enseignement des fractions à l'école primaire est de fournir un outillage pour la compréhension des écritures à virgule des nombres décimaux, et des expressions en dixièmes, centièmes en CM1, puis millièmes en CM2.

Nous avons choisi en CM1 de prendre appui sur le partage de l'unité en demis, quarts, dixièmes, centièmes... dans des situations de mesure de longueurs, pour donner une signification aux fractions, comme aux fractions décimales, en présentant $\frac{7}{4}$ comme sept quarts (7 fois un quart de l'unité) ou $\frac{13}{10}$ comme treize dixièmes (13 fois un dixième de l'unité).

En CM2, cette même signification est à nouveau travaillée dès le début d'année dans le même contexte de longueurs et étendue à des situations de mesures d'aires ou de représentations de quantités par des surfaces. Cette compréhension de la fraction s'appuie sur une mise en relation effective entre représentation figurée (figure construite en reportant 7 fois la part obtenue en partageant une figure unité en 4 parts identiques), désignation verbale (sept quarts) et désignation symbolique ($\frac{7}{4}$).

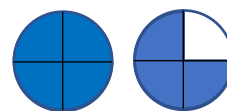
Plus tard, la recherche de quotients non entiers amène à mobiliser cette première signification pour exprimer la valeur d'une part à l'aide d'une fraction : le partage effectif de 7 unités en 3 parts égales donne des parts valant deux unités et un tiers d'unité (autrement dit sept tiers d'unité). C'est un premier pas dans la construction d'une nouvelle signification de la fraction, qui sera poursuivie et complétée en 6^e, dans laquelle la fraction $\frac{7}{3}$ est présentée comme étant le nombre qui, multiplié par 3 donne 7, c'est à dire le quotient exact de la division de 7 par 3.

La fraction est parfois d'abord présentée en tant qu'expression d'une proportion :

$\frac{3}{4}$ comme 3 parts coloriées sur 4 parts identiques.



Cette présentation, de prime apport facile d'accès, rend difficile l'expression de quantités supérieures à 1, comme dans l'exemple ci-contre où la proportion est de



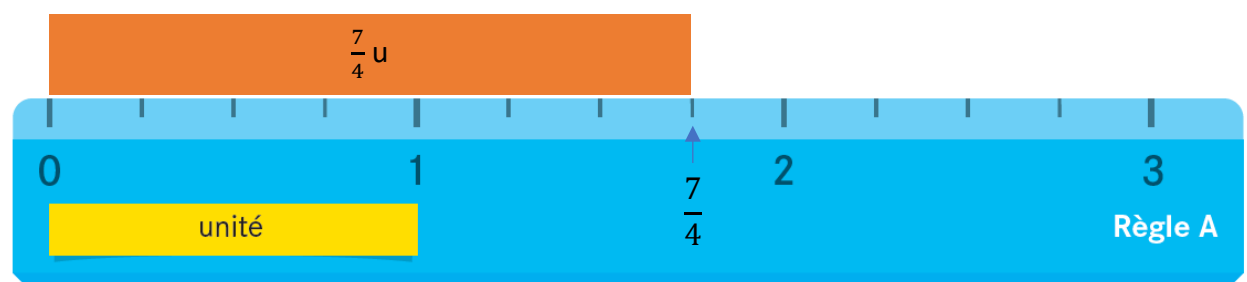
7 parts coloriées sur 8 parts apparentes ($\frac{7}{8}$) alors que le nombre de tarte représenté est $1 + \frac{3}{4}$ c'est à dire $\frac{7}{4}$

L'approche que nous présentons évite cet écueil et permet aussi aux élèves de comprendre ce que signifie « prendre $\frac{7}{4}$ d'une quantité ou d'un nombre » : prendre les $\frac{7}{4}$ de 20 revient à partager 20 en 4 parts égales (donc de valeur 5) et à assembler 7 parts de cette valeur (donc $\frac{7}{4}$ de 20 est égal à 35).

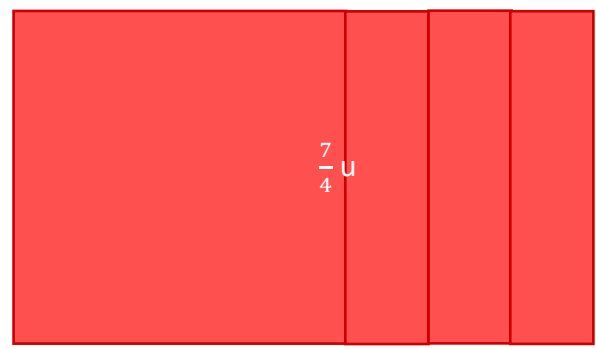
↳ Capmaths CM2 propose de poursuivre le travail engagé en CM1 sur les longueurs (avec des bandes de longueur 1 unité et des règles graduées en fractions de l'unité) et de le reprendre avec un nouveau matériel « surfaces », pour effectuer des mesures d'aires ou des constructions de surfaces d'aire donnée.

L'usage de ces différents matériels oblige à lier l'expression d'une mesure de longueur non entière et repérage d'un point sur une ligne graduée ainsi qu'à envisager les équivalences entre des expressions fractionnaires de mesures effectuées dans différents contextes de grandeurs. Ces mises en lien contribuent à donner à la fraction un statut de nombre décontextualisé.

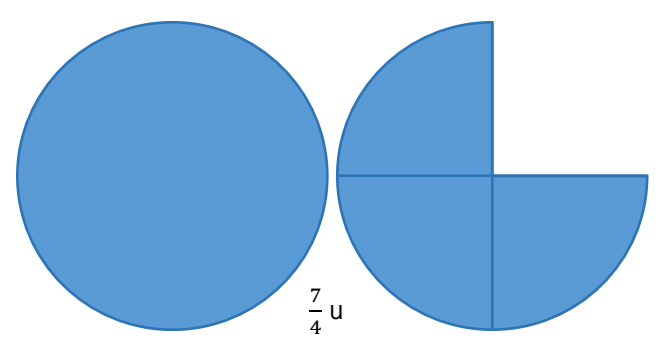
• Différentes représentations de $\frac{7}{4}$



L'unité est la longueur de la bande unité.



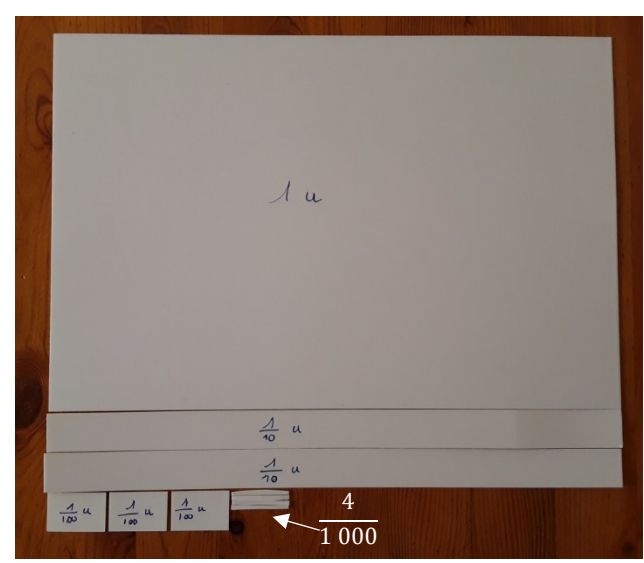
L'unité est l'aire du carré rouge.



L'unité est l'aire du disque bleu.

Ces différentes représentations permettent d'illustrer des égalités de fractions simples ou des décompositions de fractions en une somme d'unités et d'une fraction inférieure à un. En appliquant aux fractions décimales, elles permettent d'accomplir un travail sur les nombres décimaux en montrant qu'ils peuvent, comme les entiers, se décomposer en unités de numération ou être une autre expression numérique de certaines fractions simples ($\frac{1}{2}$ c'est aussi 5 dixièmes ; $\frac{1}{4}$ c'est aussi 25 centièmes...).

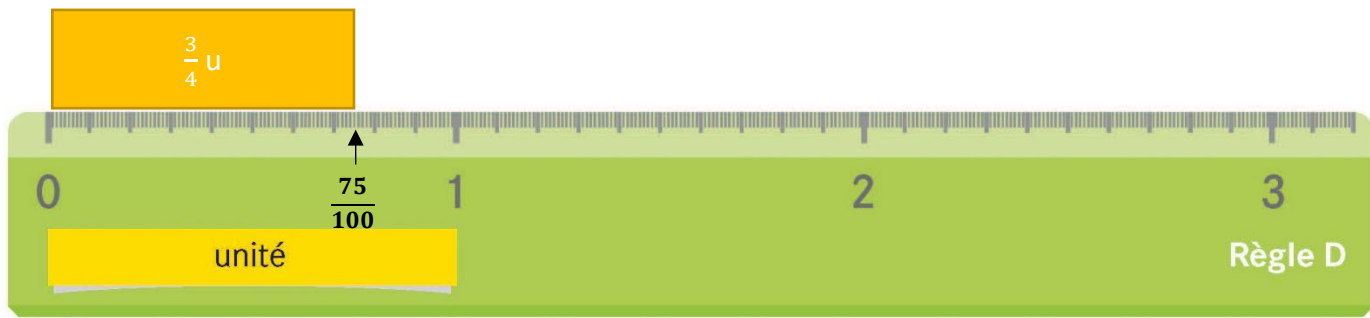
Exemple 1 : décomposition de $\frac{1\ 234}{1\ 000}$ en unités de numération



1 234 millièmes = 1 000 millièmes + 200 millièmes + 30 millièmes + 4 millièmes
 = 1 unité + 2 dixièmes + 3 centièmes + 4 millièmes

$$\frac{1\ 234}{1\ 000} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1\ 000}$$

Exemple 2 : $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$



1 unité = 4 quarts = 100 centièmes, donc 1 quart = 100 centièmes divisé par 4 = 25 centièmes et 3 quarts = 3 fois 25 centièmes = 75 centièmes.

En CM1, l'inscription de la **décomposition de fractions décimales en unités de numération dans un tableau de numération prolongeant celui des nombres entiers** a permis d'introduire une nouvelle écriture de ces nombres sur une seule ligne. Pour cela, il était nécessaire de trouver un marqueur du rang de chaque chiffre. La virgule placée à droite du chiffre des unités joue ce rôle :

Ainsi la décomposition de 1 234 millièmes en 1 unité 2 dixièmes 3 centièmes et 4 millièmes amène à écrire $\frac{1\ 234}{1\ 000}$ sous la forme du nombre à virgule 1,234 et celle de $\frac{75}{100}$ en 0 unité 7 dixièmes et 5 centièmes conduit à l'écrire avec une virgule 0,75

...	milliers (1 000)	centaines (100)	dizaines (10)	unités (1)	dixièmes $(\frac{1}{10})$	centièmes $(\frac{1}{100})$	millièmes $(\frac{1}{1\ 000})$...
$\frac{1\ 234}{1\ 000}$ →				1,	2	3	4	→ 1,234
$\frac{75}{100}$ →				0,	7	5		→ 0,75

La compréhension du passage de l'écriture d'un nombre sous forme de fraction décimale à une écriture à virgule et inversement est un moment clé dans l'apprentissage des nombres décimaux. Pour cette raison, il est repris et renforcé en CM2 en mettant en lumière l'intérêt de ces transformations qui historiquement expliquent l'introduction de l'écriture à virgule³ et justifient son utilisation. Celle-ci, en prenant soin d'aligner verticalement les chiffres selon les unités de numération, facilite en effet grandement les calculs posés en ramenant les algorithmes de calculs sur les nombres décimaux à ceux construits pour les nombres entiers.

Un changement d'écriture permet par exemple de poser et d'effectuer le calcul $\frac{1\ 234}{1\ 000} - \frac{75}{100}$ ainsi :

$$\begin{array}{r}
 1, \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\
 - \quad 0, \quad 7 \quad 5 \\
 \hline
 0, \quad 4 \quad 8 \quad 4 \quad \longrightarrow \quad \frac{484}{1\ 000}
 \end{array}$$

³ Voir par exemple « Histoire des décimaux » : <https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths/nombres/les-decimaux>