Les enjeux de l'apprentissage du calcul et de la proportionnalité

Sommaire

1 Les calculs relatifs à l'addition et la soustraction

• L'extension de l'utilisation du répertoire additif aux nombres décimaux

Au CM2, les élèves mobilisent un **certain nombre de résultats construits au cycle 2** et consolidés au CM1 :
– ceux du **répertoire additif** pour effectuer des calculs portant sur des **nombres entiers de dizaines, centaines, milliers, millions** ;
– les **compléments d'un nombre à la dizaine supérieure ; d'une dizaine entière à 100, d'une centaine entière à 1 000** (éléments clés pour le calcul réfléchi).
Les élèves mobilisent ces connaissances sur les nombres décimaux pour pouvoir produire rapidement des résultats (notamment avec des nombres exprimés en dixièmes ou en centièmes) dans les mêmes types de calcul et en particulier **pour donner le complément d'un décimal au nombre entier supérieur.**

Du point de vue du **calcul réfléchi, mental ou en ligne**, ils élargissent l'utilisation des **principales propriétés de l'addition** à des calculs rendus plus complexes par la nature des nombres en jeu, leur taille ou leur nombre (exemple : 1,2 + 27,9 + 0,8 = 27,9 + 2).

Concernant le **calcul posé**, au CM2, les élèves **apprennent** les algorithmes de **l'addition et de la soustraction de deux nombres décimaux.**

Les problématiques liées au **sens de ces opérations** sont traitées à partir de la page 4.

L'utilisation du répertoire additif pour produire rapidement des résultats sur les nombres décimaux et en mémoriser certains est **le fruit d'un processus** dont les aspects peuvent être précisés ainsi :

• **Certains faits numériques construits sur le modèle des entiers sont facilement mémorisés :** ainsi dans 0,3 + 0,5 = 0,8 on retrouve 3 + 5 = 8, en effet 3 dixièmes + 5 dixièmes = 8 dixièmes.

• **Cette apparente similitude peut constituer un obstacle pour l'acquisition d'autres faits :** 0,6 + 0,6 par exemple n'est pas égale à 0,12 et 0,2 + 0,03 n'est pas égale à 0,5.
Cette acquisition nécessite d'interpréter l'écriture à virgule des nombres décimaux (voir hatier-clic.fr/21CM2capgcompl02) : valeur des chiffres dans cette écriture et relations entre unités de numération (1 unité = 10 dixièmes, 1 dixième = 10 centièmes, 1 centième = 10 millièmes). Ainsi 0,2 + 0,03 traité en prenant appui sur la numération décimale (2 dixièmes + 3 centièmes) est égale à 0,23 et 0,6 + 0,6 (6 dixièmes + 6 dixièmes) à 12 dixièmes ou 10 dixièmes + 2 dixièmes donc à 1 unité et 2 dixièmes ou 1,2.
Une **lecture signifiante des écritures à virgule** (par exemple : *une unité deux dixièmes* ou *douze dixièmes* pour 1,2) permet aux élèves d'additionner ou soustraire des nombres décimaux exprimés en unités de numération en utilisant leurs connaissances construites sur les entiers et facilite ainsi l'extension du répertoire.

• **Avant d'être mémorisés, certains résultats sont souvent d'abord reconstruits**, en prenant appui sur un résultat connu et sur une propriété de l'addition.

Exemple : 0,7 + 0,9 obtenu par 0,7 + 0,3 + 0,6 (passage par 1), par 0,7 + 0 ,7 + 0,2 (appui sur le double de 0,7) ou par 0,9 + 0,1 + 0,6 (changement de l'ordre des termes et passage par 1) ou encore ayant recours aux unités de numération : 7 dixièmes + 9 dixièmes = 16 dixièmes = 10 dixièmes + 6 dixièmes = 1 unité + 6 dixièmes = 1,6. Dans ces exemples, la propriété d'associativité et

parfois celle de commutativité sont mobilisées implicitement.
Ce travail de reconstruction de résultats, qui relève du calcul réfléchi, est facilité dans le cas des nombres décimaux par la capacité à **retrouver rapidement le complément d'un décimal non entier au nombre entier supérieur.**
• **L'entrainement, à partir d'exercices variés (interrogation orale, jeux, logiciels interactifs…) est nécessaire,** mais reste insuffisant si les autres aspects ne sont pas travaillés.

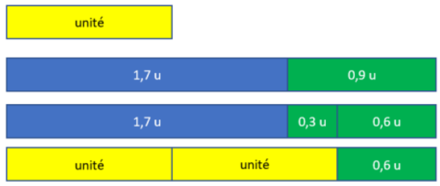
Les interrogations sur le répertoire sont du type *Six dixièmes plus quatre dixièmes ? Combien pour aller de six dixièmes à un ? Que faut-il ajouter à six dixièmes pour obtenir une unité ? un moins six dixièmes ?*

• Le calcul réfléchi, mental ou en ligne

• **Une caractéristique essentielle du calcul réfléchi est que, pour un même calcul, il existe toujours plusieurs procédures possibles.** Prenons par exemple 120 – 78.
Une procédure souvent enseignée (voire imposée) consiste à soustraire 80, puis ajouter 2. Elle est bien entendu valide, mais d'autres procédures sont possibles :
– chercher ce qu'il faut ajouter à 78 pour obtenir 120 en passant par exemple par 80 puis 100. Dans ce cas, le calcul soustractif est remplacé par un calcul additif : compléments de 78 à 80, ajout du complément de 80 à 100, puis de 100 à 120 ou directement celui de 80 à 120 ;
– on peut aussi soustraire 70 à 120, puis 8 à 50 ;
– il est également possible de calculer 122 – 80 en ajoutant 2 aux deux termes de la différence, procédure trop peu utilisée car trop peu enseignée…

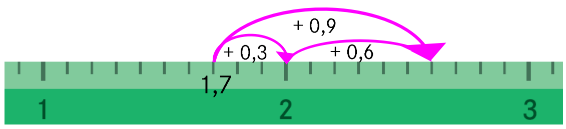
• **Le plus souvent, plusieurs procédures sont d'égale efficacité.** Il est donc important de ne pas focaliser les élèves sur une seule procédure et d'inciter chaque élève à choisir une procédure qui lui convient, lui laisser un temps suffisant pour l'élaborer et la mener à bien, puis à en changer plus tard en fonction des calculs proposés.
Pour permettre aux élèves de s'approprier des procédures qu'ils n'ont pas imaginées, des temps doivent être consacrés à l'explicitation et à la verbalisation des procédures utilisées et à leur illustration par un écrit ou à l'aide d'un matériel. En effet, souvent, l'expression verbale des procédures gagne à être accompagnée par **une illustration imagée qui peut faire référence à l'aspect cardinal des nombres (quantités), à leur aspect mesure ou à leur aspect ordinal (ligne numérique).**
Exemple : calcul de 1,7 + 0,9 en passant par 2 :
0,9 est décomposé en 0,3 + 0,6 ce qui conduit au calcul 1,7 + 0,9 = 1,7 + (0,3 + 0,6) = (1,7 + 0,3) + 0,6 = 2 + 0,6 = 2,6.

Aspect mesure (de longueur)



Une nouvelle unité est fabriquée avec « 0,7 de 1,7 » et « 0,3 de 0,9 ».

Aspect ordinal



• **Le calcul réfléchi diffère du calcul posé.** En particulier, il s'effectue souvent « de gauche à droite » alors que le calcul posé s'effectue de « droite à gauche ». Ainsi, mentalement ou en ligne, pour calculer *six-cent-vingt plus trois-cent-quatre-vingts*, on commence plutôt par *six-cents plus trois-cents égale neuf-cents*, puis *vingt plus quatre-vingts égale cent* et, enfin, *neuf-cents plus cent égale mille*. Les élèves en difficulté en calcul mental sont parfois des élèves qui n'utilisent pas de telles procédures, mais qui posent l'opération dans leur tête. D'où l'importance de ne pas mettre en place prématurément des techniques de calcul posé qui pourraient avoir un effet négatif sur l'élaboration de procédures de calcul mental.

• **L'efficacité du calcul réfléchi repose à la fois sur des faits numériques mémorisés et sur des stratégies.**
Celles-ci consistent très souvent à décomposer un ou plusieurs des nombres en jeu dans le calcul, puis à recomposer les nombres obtenus, de façon à aboutir à un calcul plus simple que celui donné initialement. Ces stratégies résident en fait

dans l'utilisation des **propriétés des opérations** qui, pour les élèves, sont utilisées en acte. Elles n'ont pas à être nommées, mais à partir des calculs traités, l'enseignant peut mettre en évidence et verbaliser dans un langage adapté ce qu'il est possible de réaliser avec chaque opération. Ainsi, à l'occasion du calcul de 122 − 78 envisagé précédemment, l'enseignant peut souligner qu'il est possible d'ajouter un même nombre aux deux termes d'une différence et obtenir ainsi une différence qui lui est égale, pour évoquer la propriété de l'écart constant.
Au CM2, les principales propriétés utilisées sont :
– **la commutativité de l'addition** : le calcul de 1,7 + 9,3 peut être remplacé par celui de 9,3 + 1,7 (on peut changer l'ordre des termes) ;
– **l'associativité de l'addition** : 9,3 + 1,7 = 9,3 + (0,7 + 1) = (9,3 + 0,7) + 1, ce qui justifie un calcul par ajouts successifs (on peut grouper les termes comme on veut) ;
– le fait **qu'ajouter une différence revient à ajouter son 1er terme, puis à soustraire son 2e terme :**
9,3 + 1,7 = 9,3 + (2 − 0,3) = (9,3 + 2) − 0,3 ;
– le fait **que soustraire une somme revient à soustraire successivement chacun de ses termes** :
9,3 − 1,7 = 9,3 − (1 + 0,7) = (9,3 − 1) − 0,7 ;
– le fait que **soustraire une différence revient à soustraire son premier terme et à ajouter ensuite son deuxième terme au résultat :**
9,3 − 1,7 = 9,3 − (2 − 0,3) = (9,3 − 2) + 0,3 ;
– la **propriété de l'écart constant** : en ajoutant ou en soustrayant un même nombre aux deux termes d'une différence, on obtient une différence qui lui est égale :
9,3 − 1,7 = (9,3 + 0,3) − (1,7 + 0,3) = 9,6 − 2.

Les calculs peuvent progressivement, au cycle 3, être comme ici exprimés en ligne avec des parenthèses. Mais les formulations verbales et des représentations (une ligne numérique, arbre de calcul, matériel) aident à leur compréhension.

• Le calcul approché

La pratique du calcul approché est enseignée au CM2 pour faire des estimations ou contrôler le résultat d'un calcul posé ou instrumenté.
Elle présente plusieurs sources de difficultés. Il faut calculer sur des arrondis dont le choix dépend de la précision souhaitée et de la facilité de calcul qu'ils procurent. Ces choix d'arrondis ne sont donc pas systématiques et il peut même arriver que, après une série d'arrondis à une valeur près, il soit préférable d'arrondir un nombre à une valeur inférieure à celle qui correspond à son « arrondi normal ». C'est par exemple le cas quand on veut fournir une estimation à l'unité près de 1,65 + 2,73 + 3,71 + 4,8 où la somme des arrondis des termes à l'unité près donne une approximation un peu trop éloignée du résultat exact (14 pour 12,89).
Ce type de calcul est donc insécurisant pour les élèves.
Nous consacrons une séquence d'apprentissage sur les nombres entiers (unité 1, apprentissage 3) à ce type de calcul qui peut et doit être aussi sollicité avec des nombres décimaux en toutes occasions où le résultat d'un calcul doit être contrôlé.

• Le calcul posé

Aujourd'hui, l'intérêt pratique des **techniques de calcul posé** est moindre que ce qu'il était avant la vulgarisation de l'usage des calculatrices.
Mais leur intérêt pédagogique et culturel demeure : leur étude permet de renforcer chez les élèves la connaissance des nombres, de la numération décimale et des propriétés des opérations, à condition que leur apprentissage vise la compréhension des mécanismes à l'œuvre dans leur exécution. C'est aussi l'occasion d'initier les élèves à la pensée algorithmique qui consiste à imaginer des processus valides quelles que soient les spécificités des nombres en présence et qui marque la différence fondamentale entre calcul posé et calcul réfléchi.

Les algorithmes de l'addition et de la soustraction mis en place pour les nombres entiers[1] se prolongent facilement au cas des nombres décimaux écrits avec un virgule… C'est d'ailleurs l'une des raisons historiques de

---

[1] Des tutos de ces algorithmes sont accessibles à partir du manuel numérique Cap Maths CM2.

l'introduction de cette écriture, il y a environ 400 ans.
La principale difficulté tient au fait que le repérage de la valeur des chiffres qui se faisait à partir du chiffre de droite pour les nombres entiers se fait à partir de la virgule pour les nombres décimaux, ce qui implique une modification de la disposition des nombres dans un calcul en colonnes.
Dans ces dispositions il arrive parfois qu'un chiffre se trouve seul dans sa colonne. Ceci peut constituer une difficulté supplémentaire en particulier dans le cas de soustractions comme 56,12 – 18,476 où le chiffre correspondant au rang des millièmes dans 56,12 n'apparait pas.

L'essentiel des explications est donc lié à la compréhension de ces écritures à virgule (voir hatier-clic.fr/21CM2capgcompl02). Celle-ci s'appuie sur la décomposition des nombres en unités de numération (unités, dixièmes, centièmes, millièmes) qui s'inscrit dans la continuité du système positionnel d'écriture chiffrée des entiers
La notion de retenue prend sens, en raisonnant sur ces décompositions, en faisant appel aux relations entre unités de numération : 0,3 + 0,8 c'est *trois dixièmes plus huit dixièmes* donc *onze dixièmes ou une unité et un dixième* car dix dixièmes font une unité.
De même le calcul 56,12 – 18,476 peut être ramené à la forme 56,120 – 18,476, similaire au cas des entiers, parce que 56,12 c'est *56 et 12 centièmes* donc *56 et 120 millièmes* car 1 centième vaut 10 millièmes.
Il est essentiel, pour que ces calculs soient compris, de les illustrer avec du matériel (des surfaces d'aire 1 unité, 1 dixième, 1 centième et 1 millième d'unité par exemple) en même temps qu'ils sont conduits avec les écritures fractionnaires ou à virgule. Nous proposons à nouveau au CM2 une séquence d'apprentissage à cet effet (unité 4 apprentissage 3).

• Le calcul instrumenté

Les calculatrices sont utilisées lorsque c'est pertinent, donc au choix de l'enseignant. Elles sont particulièrement utiles lorsque, dans un problème qui comporte des données numériques de grande taille, on souhaite mettre l'accent sur la démarche de résolution ; elles permettent alors de soulager l'élève de l'effectuation des calculs eux-mêmes.
Plusieurs modèles existent, dont les spécificités peuvent faire l'objet d'une étude avec les élèves. Cela concerne la présence ou non de touches « parenthèses », ce qui fournit l'occasion de travailler sur les règles d'usage des parenthèses.

2 Les problèmes du champ additif (addition, soustraction)

Cette partie explicite les propositions de Cap Maths pour le champ additif, c'est-à-dire les problèmes qui relèvent du sens de l'addition et de la soustraction. On y précise les catégories de problèmes pour lesquels le recours à un calcul élémentaire[2] a été enseigné au cycle 2 et au CM1 et doit être entretenu au CM2, et ceux qui sont proposés aux élèves en vue d'une résolution personnelle utilisant des procédures variées (*cf.* typologie des problèmes du champ additif, en annexe 1, p. 19)
Concernant des problèmes dont on peut attendre à un moment de la scolarité la résolution rapide par un calcul élémentaire, il est important de souligner que certains élèves ne peuvent encore en donner qu'une résolution personnelle. La priorité reste de les encourager à résoudre les problèmes proposés, sans perdre de vue que l'exploitation de solutions diverses, leur explicitation et leur mise en relation peut les aider à progresser vers l'utilisation de l'opération la plus appropriée.
La typologie donnée en annexe pour le champ additif est inspirée de celle élaborée par Gérard Vergnaud. Elle ne concerne que les types de problèmes envisagés au CM (voir annexe 1).

• Les catégories de problèmes qui peuvent être résolus rapidement par un calcul élémentaire au cycle 3

Pour l'addition et la soustraction, au cycle 2, le recours à un calcul élémentaire a été explicitement travaillé pour presque tous les types de problèmes, avec des données entières. Seuls les problèmes relatifs à la composition de deux transformations n'ont

[2] Pour les catégories de problèmes envisagés, on appelle ici calcul élémentaire un calcul à 2 termes (parfois 3).

pas fait l'objet d'un apprentissage organisé, mais ils ont cependant été proposés aux élèves et résolus par des procédures personnelles.

Le travail sur tous les types de problèmes se poursuit tout au long du cycle 3, avec des nombres plus grands ou avec des nombres décimaux, dans divers domaines de grandeurs (longueurs, masses, contenances, durées, aires).

Pour certains types de problèmes, le recours à un calcul élémentaire doit être consolidé au CM1 et au CM2. Cela concerne notamment les problèmes de comparaison. À partir du CM1, on s'assure que les élèves ont compris **qu'une différence n'est pas modifiée si on ajoute ou soustrait un même nombre à chacun de ces termes**. On vise également **la maitrise des expressions « ... de plus » ou « ... de moins »** en les différenciant des expressions « ... fois plus » ou « ... fois moins ».

Selon les catégories de problèmes, le recours à un calcul élémentaire est immédiat pour certains élèves. Il nécessite une reformulation du problème pour d'autres élèves ou encore n'intervient qu'après qu'un schéma leur a permis de bien comprendre la situation. Pour d'autres élèves encore, le recours à des procédures plus personnelles est encore nécessaire. Cela peut dépendre de la taille des nombres en jeu, des grandeurs évoquées, de la formulation de l'énoncé, de la familiarité avec le contexte...
Dans tous les cas, au moment de l'exploitation collective, le calcul additif ou soustractif est explicité et mis en relation avec d'autres procédures éventuellement utilisées.

Certains problèmes relatifs à la composition de transformations peuvent maintenant être résolus rapidement sans qu'un apprentissage spécifique soit nécessaire, notamment dans le cas où deux transformations de même signe sont en jeu. D'autres problèmes de cette catégorie nécessiteront pendant longtemps encore un temps de recherche important pour être résolus, même par des adultes. Il s'agit de problèmes qui font intervenir deux transformations de signes contraires comme le dernier problème cité dans les tableaux en annexe 1 p. 19.

3 Les calculs relatifs à la multiplication et la division

Au CM2, les élèves :
– confortent et consolident la **mémorisation des tables de multiplication** ;
– mémorisent les **premiers multiples de 25, de 50 et de 15** (30, 45 et 60) et les **critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9 et 10** ;
– apprennent à **multiplier et à diviser par 5, 10, 50 et 100 des nombres décimaux**, et à les **diviser par 100 et 1 000.**
– connaissent **quelques propriétés des opérations** (par exemple :
$45 \times 21 = 45 \times 20 + 45$;
$6 \times 18 = (6 \times 20) - (6 \times 2)$).

Du point de vue du **calcul réfléchi, mental ou en ligne**, ils doivent être capables de mobiliser les principales **propriétés de la multiplication** pour mener des calculs rendus plus complexes par la nature des nombres en jeu, leur taille ou leur nombre.
Ils doivent être également capables de vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant un **ordre de grandeur**.

En calcul posé, ils apprennent des algorithmes **de la multiplication d'un décimal par un entier** et de **la division de deux nombres entiers** pour trouver un quotient entier ou décimal ainsi que de la **division d'un décimal par un entier.**

• La mémorisation des tables de multiplication

La mémorisation de résultats ou de procédures relatifs à la multiplication est le fruit d'un processus long amorcé dès le CE1 et qui doit être poursuivi jusqu'à la fin de l'école primaire, voire au début du collège.
Quelques caractéristiques peuvent en être précisées.
• **Certains faits numériques sont mémorisés plus rapidement que d'autres,** notamment les résultats des tables de 2, 5 ou 4 ou certains carrés.
• **Certains faits sont davantage liés à la prise de conscience d'une propriété** de l'opération, qui permet de les obtenir, qu'à un effort de mémorisation : multiplication par 0 ou par 1.
• **Avant d'être mémorisé, un résultat est souvent d'abord reconstruit**, en prenant appui sur un résultat connu et sur une propriété de la multiplication. Même si le répertoire des résultats mémorisés s'accroit, la reconstruction reste nécessaire pour certains

élèves. Ainsi, si 8 × 7 n'est pas connu, il peut être retrouvé. Par exemple, à partir de 7 × 7 = 49, il est possible de tenir le raisonnement : 8 fois 7, c'est 7 fois 7 plus 1 fois 7, donc 49 + 7 = 56. Il est aussi possible, à partir de 4 × 7 = 28, de considérer que 8 × 7 est le double de 28.

Cependant, contrairement à l'addition, où une partie seulement du répertoire peut être mémorisée permettant la reconstruction instantanée des résultats de l'autre partie, **le répertoire multiplicatif doit être complètement mémorisé** pour être efficace et permettre de répondre à des questions du type *Combien de fois 6 dans 50 ?* indispensable pour le calcul d'une division.

• **L'entrainement enfin joue un rôle essentiel et doit faire l'objet d'un travail permanent.** Il peut relever d'activités collectives (procédé La Martinière, par exemple), individuelles (sur papier ou sur écran) ou par équipes (jeux).

Les interrogations sur le répertoire doivent être diverses : *8 fois 6 ? Combien de fois 6 dans 48 ? Par quel nombre faut-il multiplier 6 pour obtenir 48 ? 48 est combien de fois plus grand que 6 ? 48 divisé par 6 ? Combien de fois 6 dans 50 ? 50 divisé par 6 ?*

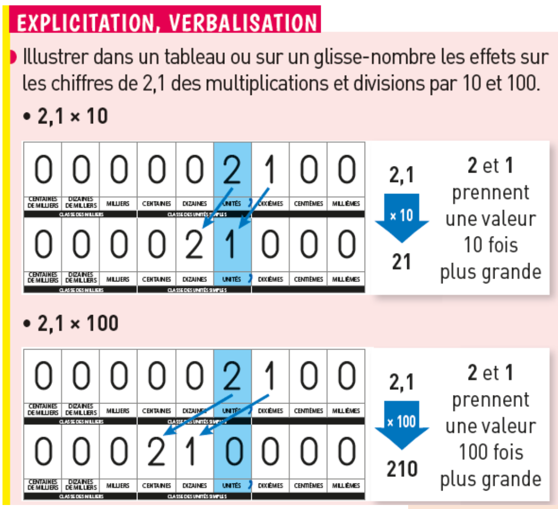
Les questions du type « combien de fois 6 dans 50 ? » ou « 50 divisé par 6 ?» sont celles qui se posent au moment du calcul d'une division euclidienne. Elles demandent à l'élève de savoir situer le nombre à diviser par rapport à un multiple du diviseur qui lui est proche et inférieur. Cela nécessite de très bien connaitre les tables de multiplication.

• **Multiples et critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9 et 10**

Les élèves ont été familiarisés en CM1 avec la notion de multiple et en connaissent une première définition opérationnelle : un nombre entier est multiple d'un autre s'il se trouve dans **sa table de multiplication** ou dans son prolongement. En CM2, cette définition est complétée par une autre : un nombre entier *a* est multiple d'un entier *b* si **le reste de la division euclidienne de *a* par *b* est nul.**
Les critères de divisibilité aident à la construction de décompositions multiplicatives sur lesquelles on pourra s'appuyer pour mener du calcul réfléchi. Les régularités observées dans l'écriture du dernier chiffre de la suite des multiples d'un nombre permet de dégager les critères de divisibilité par 2, 5 et 10. Ceux de divisibilités par 3 et 9 sont moins faciles à mettre en évidence et font l'objet d'un apprentissage spécifique basé sur l'étude d'exemples et de contrexemples (*cf.* unité 9 apprentissage 4). À ce niveau de classe, leur caractère général est admis sans être démontré.

• **Multiplication et division par 10, 100, 1 000…**

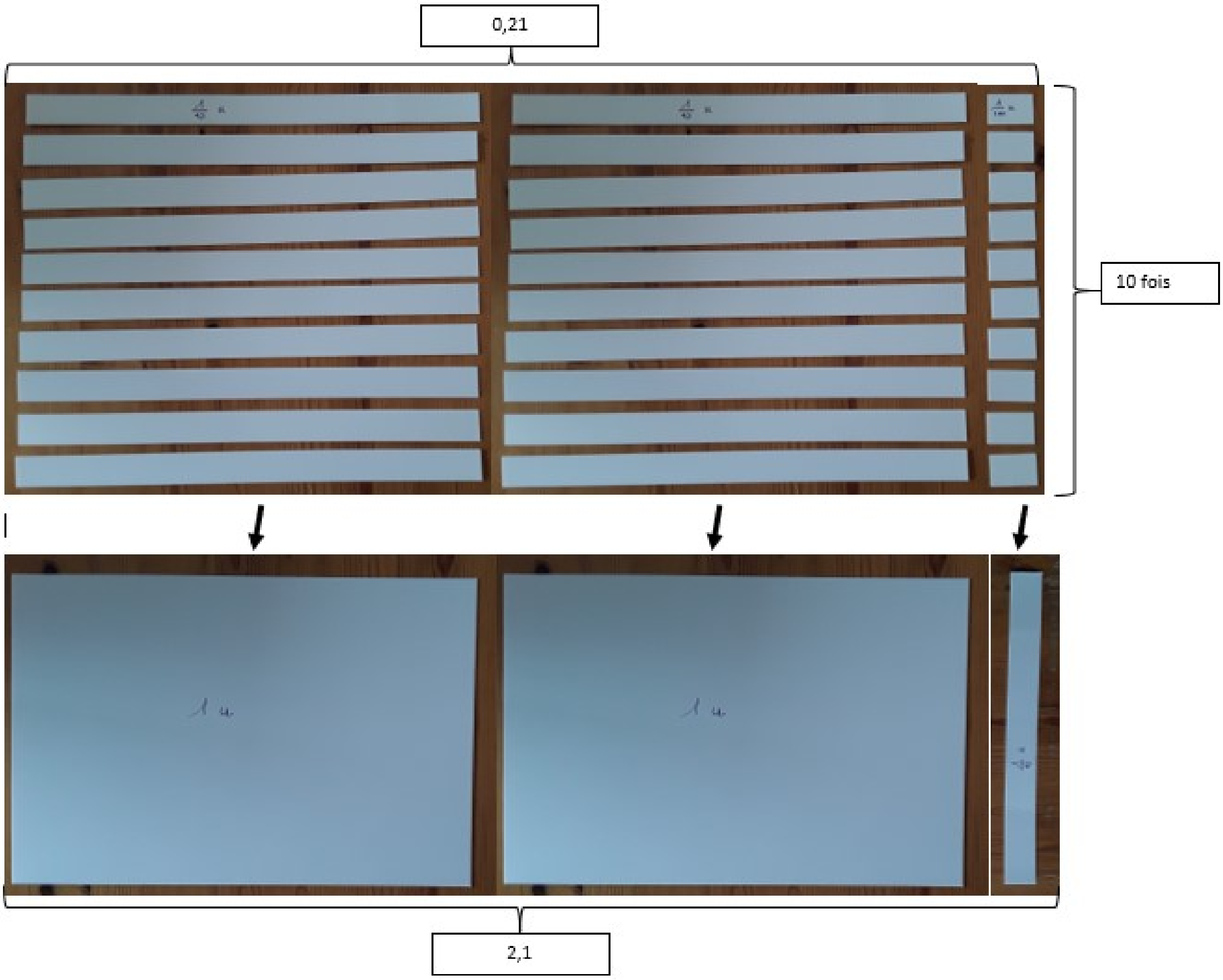
Au cycle 2, les élèves ont souvent appris à multiplier un nombre entier par 10 en appliquant la « règle des 0 » qui revient à accoler un 0 à la droite de l'écriture chiffrée du nombre à multiplier. Formulée ainsi cette règle n'est plus valide pour les nombres décimaux écrits avec une virgule. Cependant une approche raisonnée en lien avec la numération décimale, permet de faire prendre conscience aux élèves que **multiplier un nombre par 10, 100 ou 1 000 revient à donner à chacun de ces chiffres une valeur 10 fois, 100 fois ou 1 000 fois plus grande.** Cette approche menée sur des entiers (à partir du CE1 dans Cap Maths) est prolongée aux décimaux. Elle amène à constater que, quand on multiplie un nombre décimal par 10, 100 ou 1 000, ce n'est pas la virgule qui se déplace d'un, deux ou trois rangs vers la droite, mais **chaque chiffre du nombre qui se déplace vers la gauche d'un, deux ou trois rangs** dans le tableau de numération, donc par rapport à la virgule.



Guide p. 157

Ainsi, comme le montre la synthèse ci-dessus, conduite avec les élèves à la suite d'une activité de recherche, sur les exemples 2,1 × 10 et 2,1 × 100,
2 unités 1 dixième pris 10 fois donnent 20 unités 10 dixièmes, et comme 10 unités = 1 dizaine, et 10 dixièmes = 1 unité, 2 dizaines 1 unité.
2 unités 1 dixième pris 100 fois donnent 200 unités et 100 dixièmes, et comme 100 unités = 1 centaine, 100 dixièmes = 10 unités = 1 dizaine, 2 centaines 1 dizaine.

Cette compréhension fondamentale est illustrée, avec du matériel « surfaces » qui permet de visualiser les échanges 10 contre 1, comme sur cet exemple du produit de 0,21 par 10, puis reprise et exposée avec le glisse-nombre (tableau de numération sur lequel les cartons-chiffres peuvent être déplacés).



Elle est installée pour la multiplication par 10 et par 100 puis prolongée aux **procédures de division par 10 et par 100** avant d'être formalisée par les élèves dans le cadre général de la multiplication et de la division d'un nombre à virgule par 10, 100 ou 1 000.

Guide p. 157

• Le calcul réfléchi, mental ou en ligne

• **Comme pour l'addition ou la soustraction, une caractéristique essentielle du calcul réfléchi est que, pour un même calcul, il existe toujours plusieurs procédures possibles.**
Prenons l'exemple du calcul de 1,5 × 12, plusieurs procédures sont envisageables :
– l'une d'elles consiste à décomposer 12 en 10 + 2 et à considérer que 12 fois 1,5, c'est 10 fois 1,5 plus 2 fois 1,5, donc 15 + 3 = 18.
– une autre consiste à considérer que 12 fois 1,5, c'est 6 fois « 2 fois 1,5 », donc 6 fois 3, donc 18 ;
– d'autres encore consistent à considérer que 1,5 × 12 est égal à la moitié de 3 × 12 ou bien au dixième de 15 × 12.

• **Souvent, plusieurs procédures sont d'égale efficacité**. Il est donc important de ne pas focaliser les élèves sur une seule procédure et d'inciter chaque élève à choisir une procédure qui lui convient, lui laisser un temps suffisant pour l'élaborer et la mener à bien, puis à en changer plus tard en fonction des calculs proposés.
Pour permettre aux élèves de s'approprier des procédures qu'ils n'ont pas imaginées, des temps doivent être consacrés à l'explicitation et à la verbalisation des procédures utilisées et à leur illustration par un écrit ou à l'aide d'un matériel.

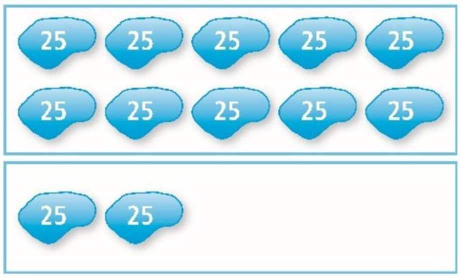
• **Le calcul réfléchi diffère du calcul posé**. En particulier, il se déroule souvent « de gauche à droite » alors que le calcul posé se déroule de « droite à gauche ». Pour calculer *quinze multiplié par six* en décomposant *quinze* en *dix plus cinq*, on calcule le plus souvent d'abord *six fois dix* égale *soixante*, puis *six fois cinq* égale *trente* et, enfin, *soixante plus trente égale quatre-vingt-dix*.
Les élèves en difficultés en calcul mental sont souvent des élèves qui posent l'opération dans leur tête. D'où l'importance de ne pas mettre en place prématurément des techniques de calcul posé qui pourraient avoir un effet négatif sur l'élaboration de procédures de calcul mental.

• **L'efficacité du calcul réfléchi repose à la fois sur des faits numériques mémorisés et sur des stratégies.**
Celles-ci consistent très souvent à décomposer un ou plusieurs des nombres en jeu dans le calcul, puis à recomposer les nombres obtenus, de façon à aboutir à un calcul plus simple que celui donné initialement. Ces stratégies s'appuient sur des **propriétés des opérations** que les élèves utilisent en acte. Elles n'ont pas à être nommées, mais à partir des calculs traités l'enseignant met en évidence et verbalise dans un langage adapté ce qu'il est possible de réaliser avec chaque opération. Ainsi, à l'occasion par exemple du calcul de 25 × 12, l'enseignant peut souligner que comme 12 c'est 6 fois 2, il est possible de calculer 6 fois 2 fois 25 en calculant d'abord 2 fois 25 et en multipliant le résultat obtenu par 6, pour évoquer la propriété d'associativité de la multiplication.
Au CM2 comme au CM1, les principales propriétés utilisées sont :
– la **commutativité de la multiplication** :
25 × 12 peut être pensé comme 25 fois 12 ou comme 12 fois 25 ;
– la **distributivité de la multiplication sur l'addition** :
12 fois 25, c'est 10 fois 25 plus 2 fois 25 ;
– l'**associativité de la multiplication** :
12 fois 25, c'est (3 fois 4) fois 25 ou 3 fois (4 fois 25), donc 3 fois 100.
– le fait que **diviser une somme revient à diviser chaque terme de la somme** (en prêtant attention au fait que le reste doit être inférieur au diviseur) : pour diviser 72 par 6, on peut décomposer 72 en 60 + 12, puis additionner les quotients de 60 et 12 par 6 (quotient 10 + 2 = 12) ;
– le fait que **dans le cas d'une division exacte, diviser par un produit revient à diviser successivement par chaque facteur du produit** : 90 divisé par 6 peut être calculé comme 90 divisé par 3 × 2, donc avec la suite de calculs 90 : 3 = 30, puis 30 : 2 = 15.
La mise en relation de diverses expressions des procédures utilisées dans les registres figurés, verbaux et symboliques est essentielle pour soutenir la compréhension de ces procédures et faire ressortir les propriétés mobilisées, par exemple pour 25 × 12.

Procédure fondée sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition	Procédure fondée sur l'associativité de la multiplication

REGISTRES FIGURÉS

Registre des groupements itérés : évocation schématisée de 12 groupements de 25 objets

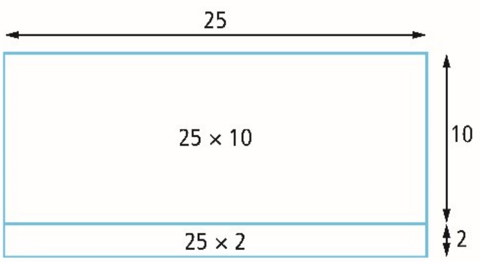


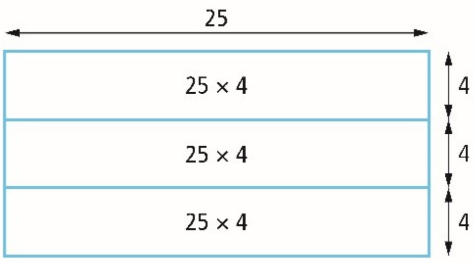
12 groupements de 25 objets décomposés en 10 groupements de 25 objets et 2 groupements de 25 objets.

12 groupements de 25 objets décomposés en 3 groupements de 4 groupements de 25 objets.

REGISTRES DES QUADRILLAGES

Évocation schématisée d'un rectangle de 25 carreaux sur 12 carreaux





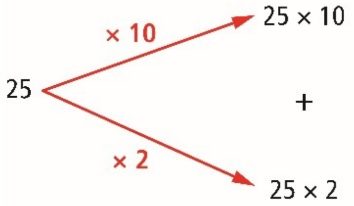
REGISTRES VERBAUX

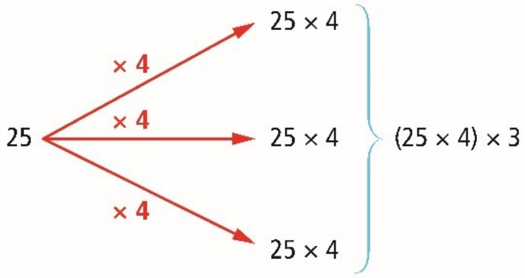
12 fois 25, c'est 10 fois 25 plus 2 fois 25

12 fois 25 c'est 3 fois « 4 fois 25 »

REGISTRES SYMBOLIQUES

Arbres de calcul





Calculs en ligne

$25 \times 12 = 25 \times (10 + 2) = (25 \times 10) + (25 \times 2)$

$25 \times 12 = 25 \times (4 \times 3) = (25 \times 4) \times 3$

• **Le calcul approché**

• **La pratique du calcul approché** est enseignée au cycle 3 pour produire des estimations ou contrôler le résultat d'un calcul posé ou instrumenté.
Elle présente plusieurs difficultés. Il faut calculer sur des arrondis dont le choix dépend de la précision souhaitée et de la facilité de calcul qu'ils procurent. Ces choix d'arrondis ne sont donc pas systématiques et il peut même arriver que, après une série d'arrondis à une valeur supérieure, il soit préférable d'arrondir un nombre à une valeur inférieure à celle qui correspond à son « arrondi normal ». Ainsi, dans l'estimation du produit de 16 par 16, arrondir un des deux facteurs à la dizaine inférieure et l'autre à la dizaine supérieure permet d'obtenir une estimation plus précise du résultat que celle calculée avec les arrondis à la dizaine supérieure (20 × 10 est plus proche de 256 que 20 × 20).
Cette difficulté est renforcée avec les calculs multiplicatifs où une approximation trop large pour un des facteurs peut avoir des conséquences sur l'approximation du résultat. Ainsi, arrondir à la centaine près les facteurs 165 et 58 pour en estimer le produit conduit à une approximation très éloignée du résultat (200 × 100 soit 20 000 pour 9 570), il est par exemple préférable d'arrondir 165 à la centaine supérieure et 58 à la dizaine inférieure, ce qui conduit 200 × 50 = 10 000..
Ce type de calcul est donc insécurisant pour les élèves mais il peut et doit être sollicité en toutes occasions où le résultat d'un calcul doit être contrôlé.

• **Le calcul posé**

• La technique traditionnelle de la **multiplication posée en colonnes** a été abordée en CE2 et reprise au CM1 pour effectuer le calcul du produit de deux entiers.

437 × 305

	4 3 7	
×	3 0 5	
	2 1 8 5	← 437 × 5
	1 3 1 1 0 0	← 437 × 3 × 100
	1 3 3 2 8 5	

En CM2, elle est étendue au calcul du **produit d'un nombre** décimal donné en écriture avec une virgule **par un entier**.

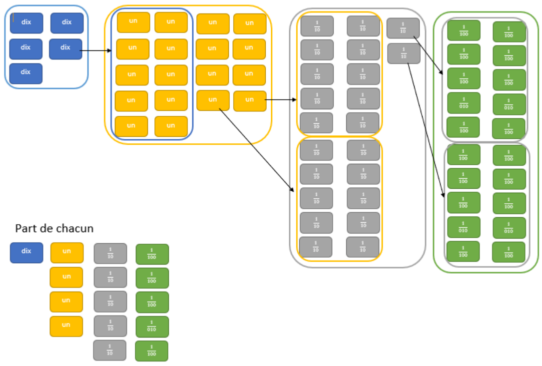
4,37 × 305

	4, 3 7	← 4,37 est égal à 437 centièmes
×	3 0 5	
	2 1, 8 5	← 437 centièmes × 5 = 2 185 centièmes = 21,85
	1 3 1 1, 0 0	← 437 centièmes × 300 = 131 100 centièmes = 1 311,00
	1 3 3 2, 8 5	← 21,85 + 1 311,00 = 1 332,85

En écrivant des virgules aux lignes intermédiaires, nous avons fait le choix d'inscrire cette nouvelle technique dans la continuité de celle utilisée pour les entiers et d'insister sur la compréhension des mécanismes mis en œuvre en œuvre par la mise en évidence des propriétés utilisées en acte.
Ainsi dans le calcul posé de 4,37 par 305 (comme dans celui de 437 par 305), c'est la distributivité de la multiplication sur l'addition qui justifie la présence des deux lignes de calculs intermédiaires. Pour être comprise des élèves, cette propriété est formulée à l'aide du mot « fois » : « calculer 305 fois 4,37 (ou 305 fois 437 centièmes), c'est calculer, d'abord 5 fois 4,37 (ou 5 fois 437 centièmes), puis encore 300 fois 4,37 (ou 300 fois 437 centièmes) ».
De même la propriété d'associativité de la multiplication permet par exemple d'expliquer le résultat de la seconde ligne de calcul : « comme 300 c'est 100 fois 3, calculer 300 fois 4,37 (ou 300 fois 437 centièmes) revient à calculer 100 fois 3 fois 4,37 (ou 100 fois 3 fois 437 centièmes), donc à multiplier par 100 le résultat de 3 fois 4,37 (ou multiplier par 100 le résultat de 3 fois 437 centièmes ».
L'écriture des résultats intermédiaires avec une virgule aide à la compréhension de la procédure et facilite le contrôle de son exécution. Le calcul posé de leur addition fournit directement le résultat final sans qu'il soit nécessaire d'opérer de transformation sur son écriture, contrairement à la technique habituelle dans laquelle on effectue d'abord le calcul sans tenir compte de la virgule avant de la placer dans le résultat.

• La disposition usuelle de la **technique de division** en potence est un élément culturel (d'autres dispositions sont en effet possibles… et utilisées dans d'autres pays). Nous avons choisi de la présenter dans un problème de partage équitable où on recherche la valeur d'une part, et de prendre appui sur les connaissances des élèves en numération pour en expliquer les différentes étapes et les illustrer sur du matériel. L'algorithme est vu comme une suite de partages successifs d'unités de numération qui composent le dividende, en commençant par celles de plus haut rang, et où les unités restantes sont converties à chaque étape en unités de numération de rang inférieur. Cette approche est valable aussi bien pour les divisions euclidienne ou décimale d'un entier par un entier que pour la division d'un décimal par un entier.

58,2 divisé par 4




```
   D  U  d  c |
   5  8, 2    | 4
 − 4          |-----------
 ------       | 1  4, 5  5
   1  8       | D  U  d  c
 − 1  6       |
 ------       |
      2  2    |
    − 2  0    |
    ------    |
         2  0 |
       − 2  0 |
       ------ |
            0 |
```

Par exemple, la division de 58,2 par 4 se fait en plusieurs étapes :

1. Partage de <u>5 dizaines</u> par 4.
Cela revient soit à diviser 5 par 4, soit à chercher combien de fois 4 est contenu dans 5 (→ 1 fois). Donc le résultat du partage est 1 dizaine (ce qui signifie que le quotient comportera 2 chiffres à gauche de la virgule) et il reste 1 dizaine à changer en 10 unités.

2. Partage des <u>18 unités</u> en 4 (10 unités + 8 unités de 58,2).
Cela revient soit à diviser 18 par 4, soit à chercher combien de fois 4 est contenu dans 18 (→ 4 fois). Le résultat du partage est donc 4 unités (au quotient, la virgule écrite à droite du chiffre indique que c'est celui des unités) et il reste 2 unités à changer en 20 dixièmes.

3. Partage des <u>22 dixièmes</u> en 4 (20 dixièmes + 2 dixièmes de 58,2).
Cela revient soit à diviser 22 par 4, soit à chercher combien de fois 4 est contenu dans 22 (→5 fois). Le résultat du partage est donc 5 dixièmes (au quotient) et il reste 2 dixièmes à changer en 20 centièmes.

4. Partage des <u>20 centièmes</u> en 4.
Cela revient soit à diviser 20 par 4, soit à chercher combien de fois 4 est contenu dans 20 (→5 fois). Le résultat du partage est donc 5 centièmes (au quotient) et il reste 0 centième. La division « se termine » : 14,55 est le quotient exact de la division de 58,2 par 4, et on peut écrire 58,2 = 14,55 × 4 ou 58,2 : 4 = 14,55.

Dans les cas où la division ne « se termine pas », le quotient exact n'est pas un décimal, mais la pose de la division permet d'en calculer une (ou des) valeur(s) décimale(s) approchée(s).

Valeurs approchées du quotient de 58,2 par 7

```
   D  U  d |
   5  8, 2 | 7
 − 5  6    |-----
 ------    | 8
      2  2 | U
```

8 est une valeur approchée par défaut à l'unité près.
On peut écrire :

- 58,2 = 8 × 7 + 2,2
- 58,2 : 7 ≈ 8

```
   D  U  d |
   5  8, 2 | 7
 − 5  6    |------
 ------    | 8, 3
      2  2 | U  d
    − 2  1 |
    ------ |
         1 |
```

8,3 est une valeur approchée par défaut au dixième près.
On peut écrire :

- 58,2 = 8,3 × 7 + 0,1
- 58,2 : 7 ≈ 8,3

```
 D U  d c |
 5 8, 2   | 7
-5 6      |--------
------    | 8, 3 1
   2  2   | U  d c
 - 2  1   |
 -------  |
      1 0 |
  -     7 |
  --------|
        3 |
```

8,31 est une valeur approchée par défaut au centième près.
On peut écrire :

- $58{,}2 = 8{,}31 \times 7 + 0{,}03$
- $58{,}2 : 7 \approx 8{,}31$

L'expression du résultat sous la forme $58{,}2 = 8 \times 7 + 2{,}2$ n'est pas attendue d'un élève de CM2, il faudra cependant qu'il retienne que comme le reste dans la divsion posée n'est pas 0, on ne peut donc pas écrire que $58{,}2 : 7 = 8$.

Avec un diviseur supérieur à 10, la technique de division peut être reprise mais elle est beaucoup plus difficile à mettre en œuvre. En effet, pour diviser par exemple 767,2 par 16, la connaissance des tables de multiplication n'est plus suffisante pour trouver le résultat du partage de 76 dizaines par 16 en effectuant 76 divisé par 16 ou en cherchant combien de fois 16 est contenu dans 76. La réponse nécessite d'utiliser un calcul approché et de maitriser le calcul réfléchi relatif au domaine multiplicatif, ce qui n'est pas le cas de tous les élèves. Pour cette raison nous suggérons de leur faciliter le travail en leur donnant en appui quelques multiples du diviseur ou en leur suggérant de les calculer eux-mêmes.

767,2 divisé par 16

Multiples de 16
16 × 2 = 32
16 × 3 = 48
16 × 4 = 64
16 × 5 = 80
16 × 6 = 96
16 × 7 = 112
16 × 8 = 128
16 × 9 = 144

```
 C D U  d c |
 7 6 7, 2   | 1 6
-6 4        |---------
-----       | 4 7, 9 5
 1 2 7      | D U  d c
-1 1 2      |
-------     |
   1 5  2   |
 - 1 4  4   |
 ---------  |
        8 0 |
      - 8 0 |
      ------|
          0 |
```

Dans ce calcul, on utilise :
– Le produit $16 \times 4 = 64$ pour déterminer le chiffre des dizaines du quotient ;
– Le produit $16 \times 7 = 112$ pour déterminer celui des unités ;
–Puis le produit $16 \times 9 = 144$ pour déterminer celui des dixièmes ;
– Enfin le produit $16 \times 5 = 80$ pour déterminer celui des centièmes.

- **Le calcul instrumenté**

• Les calculatrices sont utilisées lorsque c'est pertinent, donc au choix de l'enseignant.
Elles sont particulièrement utiles lorsque, dans un problème qui comporte des données numériques de grande taille, on souhaite mettre l'accent sur la démarche de résolution ; elles permettent alors de soulager l'élève de l'effectuation des calculs eux-mêmes.
Plusieurs modèles existent dont les spécificités peuvent faire l'objet d'une étude avec les élèves. Cela concerne la **présence ou non de touches « parenthèses »**, ce qui fournit l'occasion de travailler sur les **règles d'usage des parenthèses,** mais aussi la **présence ou non d'une touche dédiée à la division euclidienne**, qui fournit directement le quotient et le reste entiers.

4 Les problèmes du champ multiplicatif (multiplication, division)

Cette partie explicite les propositions de Cap Maths pour le champ multiplicatif, c'est-à-dire les problèmes qui relèvent du sens de la multiplication et de la division. On y précise les catégories de problèmes pour lesquels le recours à un calcul élémentaire[3] a fait l'objet d'un apprentissage spécifique au CM1 et doit faire l'objet d'un renforcement au CM2, et ceux qui sont proposés aux élèves en vue d'une résolution personnelle utilisant des procédures variées (*cf.* typologie des problèmes du champ multiplicatif, en annexe 2, p. 21)
Les problèmes dont on peut attendre la résolution par un calcul élémentaire au CM1 et au CM2 sont relatifs à la multiplication et à la division. Ils comportent d'abord des données entières, puis des données exprimées avec des nombres décimaux.
Pour ceux qui sont relatifs à la proportionnalité, leur résolution se fait par des raisonnements appropriés et contextualisés (voir p. 15). Au CM2, ces problèmes s'élargissent à des situations faisant intervenir les notions

[3] Pour les catégories de problèmes envisagés, on appelle ici calcul élémentaire un calcul à 2 termes (parfois 3).

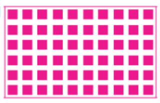
d'échelle, de pourcentage et de vitesse constante ou moyenne.
La typologie donnée en annexe 2 pour le champ multiplicatif (p. 21) est inspirée de celle élaborée par Gérard Vergnaud.

Dès le CE1, les élèves ont appris à résoudre par un calcul élémentaire (une multiplication), des problèmes relevant de deux catégories, avec des valeurs entières :
– Les problèmes où **on cherche une valeur totale suite à la réunion de plusieurs valeurs identiques**, problèmes codés (*cf.* typologie des problèmes du champ multiplicatif, en annexe 2).

grandeur 1		grandeur 2
1	→	a
b	→	c

Exemple : 7 cartes ont été distribuées à chacun des 4 joueurs. **Combien de cartes ont été distribuées ?**

– Les problèmes où on cherche **la valeur d'une quantité d'objets placés en configuration rectangulaire,** en lignes et colonnes identiques.



Exemple : Combien y a-t-il de carrés sur ce dessin ?

Au CM2, le recours à la multiplication est étendu au cas où l'une des données est exprimée par un nombre décimal et au calcul de l'aire d'un rectangle.

Exemple : Un directeur d'école achète 75 compas à 1,79 € l'un. Quel est le cout de cet achat ?

Le raisonnement est le même que si le prix d'un compas était un nombre entier : on paie 75 fois le prix d'un compas. Il y a donc, dans ce cas, continuité avec un sens connu de la multiplication. Il en va différemment pour l'achat de 1,79 kg d'un produit vendu 75 € le kg ou de 0,650 kg de fromage à 24,75 € le kg. Il est alors plus difficile de concevoir que le prix à payer peut être interprété comme 1,79 fois 75 € ou comme 0,650 fois 24,75 € !

Pour la division, dans la suite du CE2, un travail important a été conduit au CM1 pour la mise en place de la division euclidienne. La construction du sens de cette opération se heurte à un certain nombre de difficultés. Pour beaucoup d'élèves, la division est d'abord l'opération qui permet de trouver la valeur de chaque part à la suite d'un partage équitable, par exemple lorsque « *6 pirates se répartissent 74 pépites* ». En quelque sorte, diviser, c'est partager. Ce sens de la division, plus tôt compris, peut constituer un obstacle pour l'accès à d'autres sens de cette opération, notamment lorsqu'il s'agit de trouver le nombre de parts obtenues lorsqu'on réalise des groupements identiques d'objets, par exemple lorsqu'une fermière se demande « *combien de boites de 6 œufs elle peut remplir avec 74 œufs ?* ». La reconnaissance du fait qu'une même opération, la division, peut notamment être associée à ces deux catégories de problèmes ne va pas de soi et suppose un travail didactique. Au départ, la résolution des deux problèmes qui viennent d'être cités mobilise des procédures qui ne sont pas totalement identiques, comme le montre les exemples du tableau suivant (d'autres procédures sont possibles).

	Problème de partage équitable	Problèmes de groupements identiques
	6 pirates se répartissent équitablement 74 pépites. ***Quelle est la part de chacun ?***	*Une fermière range 74 œufs dans des boites de 6 œufs.* ***Combien de boites peut-elle remplir ?***
Dessin, schéma	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ∘∘ ∘∘ ∘∘ ∘∘ ∘∘ ∘∘ ∘∘ ∘∘ ∘∘ ∘∘ ∘∘ ∘∘ Etc. Distribution des pépites de un en un ou de deux en deux, puis **dénombrement de la part** de chaque pirate.	[∘∘∘ ∘∘∘] [∘∘∘ ∘∘∘] Etc. Dessin de boites de 6 œufs jusqu'à en avoir utilisé le plus possible ou dessin des 74 œufs et regroupements par 6, puis **dénombrement des boites de 6** obtenues.
Addition	7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 42 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 72 Essais de sommes de 6 nombres égaux pour atteindre 74 ou s'en approcher le plus possible, la réponse est donnée par l'un des nombres ajoutés (ici 12). La solution est donnée par un des termes de la somme.	6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 72 Ajout systématique de 6 pour atteindre 74 ou s'en approcher le plus possible. La réponse est donnée par le nombre de 6 ajoutés. La solution est donnée par le nombre de termes de la somme. La situation est plus délicate car la solution 12 n'apparait pas dans l'écriture.
Soustraction	74 – 6 = 68 ; 68 – 6 = 62 Etc. Examen de ce qui reste après avoir donné une pépite à chacun, jusqu'à ne plus avoir de pépites à distribuer, la réponse est donnée par le nombre de 6 soustraits, en considérant que chaque 6 correspond à une pépite donnée à chacun. Cette procédure est difficile, en particulier pour l'interprétation de chaque calcul.	74 – 6 = 68 ; 68 – 6 = 62 Etc. Examen de ce qui reste après avoir rempli 1 boite, puis 2 boites, jusqu'à ne plus pouvoir remplir de boites, la réponse est donnée par le nombre de 6 soustraits, en considérant que chaque 6 correspond à une boite. Cette procédure semble identique à celle de gauche, mais la signification de chaque soustraction n'est pas identique et l'interprétation de chaque calcul est ici plus facile.
Multiplication	6 × … = ? ou … × 6 = ? avec recherche d'un résultat égal ou inférieur à 74, mais le plus proche possible. Raisonnement consistant à se dire que 6 fois la part de chacun doit épuiser la quasi-totalité des pépites	… × 6 = ? ou 6 × … = ? avec recherche d'un résultat égal ou inférieur à 74, mais le plus proche possible. Raisonnement consistant à se dire que tant de fois (à trouver) 6 œufs doit épuiser la quasi-totalité des œufs

Comme on le voit, les raisonnements ne sont jamais totalement identiques. Dès lors que les élèves conçoivent la multiplication comme commutative, **c'est le recours à une multiplication à compléter qui est le mieux à même d'unifier ces deux types de problèmes et de donner sens à la division.** C'est d'ailleurs à partir de là, considérant le reste, qu'on écrira l'égalité caractéristique de la division euclidienne :

74 = (**6** × 12) + 2 ou **74** = (12 × **6**) + 2 en s'assurant que 2 < 6.

Au CM2, **ces deux types de problèmes font à nouveau l'objet d'un travail explicite, en insistant sur la relation entre division et multiplication.** Cette relation est renforcée par le travail fait en calcul mental. En effet, un calcul comme « 36 divisé par 2 » est avantageusement pensé comme « partager 36 en 2 parts égales » (aspect « partage » de la division, avec recherche de la valeur de chaque part) alors qu'un calcul comme « 36 divisé par 12 » est plus avantageusement pensé comme « combien de fois 12 dans 36 ? » (aspect « groupements » de la division), avec recherche du nombre de parts égales.

La division euclidienne de 74 par 6 peut ainsi être caractérisée comme l'opération qui permet de déterminer le nombre qui multiplié par 6 donne le résultat égal ou inférieur à 74 et aussi proche que possible de 74 (le quotient de la division), ainsi que la différence entre ce résultat et 74 (le reste de la division qui est donc inférieur à 6).

Le sens construit pour la multiplication et cette caractérisation de la division permettent de traiter la plupart des problèmes relevant des autres catégories, notamment ceux relatives à des **configurations rectangulaires** ou des **situations de comparaison multiplicative** (voir typologie en annexe 2). Les problèmes relevant de **situations de type « produit cartésien »** demeurent, pour l'essentiel, des problèmes pour chercher pour lesquels le recours à un calcul rapide n'est pas envisagé avant le collège.

Le prolongement de la division euclidienne à la division décimale de 2 entiers ou d'un décimal par un entier permet d'apporter des réponses à des situations concrètes dans lesquelles le nombre entier n'offre pas une solution satisfaisante. Il faut alors se référer au contexte du problème pour déterminer la précision attendue et en déduire le type de division à effectuer : on choisira par exemple d'effectuer une division euclidienne pour calculer la valeur d'une part dans le partage de 165 œufs en 4, alors que on effectuera une division décimale jusqu'au centième pour trouver celle résultant d'un partage de 165 € en 4.

L'introduction de quotients décimaux oblige aussi à réinterroger la signification de la multiplication comme addition itérée d'un même terme en particulier dans les problèmes où l'on recherche un nombre de parts ou la valeur d'une comparaison. En effet si 18 : 6 = 3 peut être mis en correspondance avec 3 fois 6 et 6 + 6 + 6, pour 15 : 6 = 2,5 il n'y a pas d'addition itérée de 6 qui lui corresponde. Quel sens donner alors à 2,5 fois 6 ?

La multiplication ne peut plus est être simplement vue comme une suite d'additions répétées, et il faudra faire appel à la signification fractionnaire des écritures décimales pour comprendre qu'avec 15 € on peut acheter 2,5 m de ruban à 6 € le m, c'est-à-dire 2 mètres et 5 dixièmes d'un mètre soit 2 mètres et demi ou encore que l'expression 2,5 fois plus grand signifie 2 fois et demie plus grand.

La question d'un symbole opératoire pour la division euclidienne fait débat. Le résultat d'une division euclidienne n'est pas un nombre, mais un couple de nombres (quotient, reste). Une notation du type 74 : 6 = 12, reste 2 n'est pas acceptable car elle n'est pas compatible avec l'usage du symbole = ... où les termes placés de part et d'autre doivent avoir la même valeur. La solution la plus raisonnable est de ne pas avoir de symbole pour la division euclidienne et de réserver le symbole : au cas où le reste est égal à 0.
Pour 74 divisé par 6, on écrit donc
74 = (6 × 12) + 2.
Pour 72 divisé par 6, on écrit
72 = 6 × 12 et également 72 : 6 = 12.
Cette solution a l'avantage de pouvoir être prolongée au cas du quotient décimal par exemple 74 = 4 × 18,5, donc on peut écrire 74 : 4 = 18,5.
Lorsque les quotients ne sont pas des décimaux, une division posée permet d'en donner des valeurs décimales approchées, l'utilisation du symbole « ≈ » exprime cette approximation : on écrit 74 : 6 ≈ 12 (pour donner un résultat approché à l'unité près par défaut) ou 74 : 6 ≈ 12,33 (pour un résultat approché au centième près par défaut).
Dans tous les cas, il faut être conscient que le choix du quotient doit être fait en fonction du contexte du problème pour reconnaitre le quotient exact ou une de ses valeurs approchées par excès ou par défaut comme étant la solution adaptée à la situation.

5 Les problèmes du champ multiplicatif (proportionnalité)

Cette partie explicite les propositions de Cap Maths pour l'étude de la proportionnalité. On y précise les catégories de problèmes qui sont proposés aux élèves (*cf.* typologie des problèmes du champ multiplicatif, en annexe 3, p. 23) ainsi que les procédures envisagées pour leur résolution.

La typologie donnée en annexe 3 pour les problèmes de proportionnalité est inspirée de celle élaborée par Gérard Vergnaud qui les situe dans le champ multiplicatif (voir en annexe2).

L'étude de la proportionnalité occupe une place importante au cycle 3 et se poursuivra tout au long du collège. C'est donc dans ce temps long qu'il faut penser ce qui doit être appris à chaque niveau du cycle.
En allant à l'essentiel, **l'apprentissage de la proportionnalité au CM est organisé autour de trois raisonnements,** liés à des propriétés de la proportionnalité. Ces trois raisonnements fondamentaux suffisent à traiter toutes les situations de proportionnalité travaillées au CM1 et au CM2, y compris, au CM2, celles relatives aux pourcentages, aux vitesses constantes (ou moyennes) et aux échelles pour lesquelles des procédures spécifiques seront enseignées au collège.

Les deux premiers raisonnements sont illustrés ici à partir d'une situation de réglettes identiques mises bout à bout et d'une situation relative aux vitesses, le troisième à partir d'une situation relative aux échelles.

- **Premier raisonnement : Utilisation de la propriété de linéarité (aspect multiplicatif)**

4 réglettes mises bout à bout ont une longueur totale de 6 cm. **Quelle est la longueur totale de 12 réglettes ?**

4 réglettes mesurent au total 6 cm.
12 réglettes, c'est 3 fois 4 réglettes,
donc **12 réglettes mesurent 3 fois 6 cm, donc 18 cm** (6 cm × 3 = 18 cm).

Une voiture roule à la vitesse de 120 km par heure.
Quelle distance parcourt-elle en 20 minutes ?

En 60 minutes, elle parcourt 120 km.
20 minutes, c'est le tiers de 60 minutes.
Donc **en 20 minutes, elle parcourt le tiers de 120 km donc 40 km** (120 km : 3 = 40 km).

Le même raisonnement est utilisé pour la procédure dite « de passage par l'unité », en 2 étapes :

4 réglettes mises bout à bout ont une longueur totale de 6 cm. **Quelle est la longueur totale de 3 réglettes ?**

4 réglettes mesurent au total 6 cm.
1 réglette, c'est 4 fois moins que 4 réglettes, donc 1 réglette mesure 1,5 cm (car 6 cm : 4 = 1,5 cm).
3 réglettes, c'est 3 fois plus que 1 réglette, donc **3 réglettes mesurent 4,5 cm** (car 1,5 cm × 3 = 4,5 cm).

Une voiture roule à la vitesse de 120 km par heure.
Quelle distance parcourt-elle en 16 minutes ?

En 60 minutes, elle parcourt 120 km.
1 minute, c'est 60 fois moins que 60 minutes.
Donc en 1 minute, elle parcourt 2 km (car 120 km : 60 = 2 km)
16 minutes, c'est 16 fois plus que 1 minute.
Donc **en 16 minutes, elle parcourt 32 km** (car 2 km × 16 = 32 km).

- **Deuxième raisonnement : Utilisation de la propriété de linéarité (aspect additif)**

Ce raisonnement est utilisé dans la dernière partie des deux procédures ci-dessous.

4 réglettes mises bout à bout ont une longueur totale de 6 cm.
Quelle est la longueur totale de 7 réglettes ?

4 réglettes mesurent au total 6 cm.
1 réglette mesure 1,5 cm (même raisonnement que ci-avant).
3 réglettes mesurent 4,5 cm (raisonnement ci-avant).
7 réglettes, c'est 4 réglettes ajoutées à 3 réglettes
donc **7 réglettes mesurent 6 cm plus 4,5 cm, donc 10,5 cm** (6 cm + 4,5 cm = 10,5 cm).

Une voiture roule à la vitesse de 120 km par heure.
Quelle distance parcourt-elle en 36 minutes ?

En 20 minutes, elle parcourt 40 km (*cf.* ci-avant).
En 16 minutes, elle parcourt 32 km (*cf.* ci-avant).
36 minutes, c'est 20 minutes plus 16 minutes.
Donc en 36 minutes, elle parcourt 40 km plus 32 km, donc 72 km
(car 40 km + 32 km = 72 km).

• <u>Troisième raisonnement :</u> Utilisation du coefficient de proportionnalité

1 cm sur le papier représente 2,5 m (ou 250 cm) dans la réalité (échelle 1/250).
Quelle est la longueur représentée par 2,4 cm sur le papier ?

1 cm représente 250 cm.
Donc la distance réelle (en cm) est 250 fois la distance sur le papier (en cm),
donc la distance représentée par 2,4 cm est 250 fois 2,4 cm, **donc 600 cm**
(2,4 cm × 250 = 600 cm).

Un pâtissier a fabriqué 200 croissants. À midi, il lui reste 25 % des croissants qu'il avait fabriqués.
Combien de croissants lui reste-t-il ? [4]

Pour 100 croissants fabriqués, il lui en reste 25, donc le quart de ceux fabriqués (ou 4 fois moins)
Le quart de 200 est égal à 50.
Pour 200 croissants fabriqués, il lui en restera donc 50.

Une attention particulière est portée à la reconnaissance des situations qui relèvent de la proportionnalité et de celles qui n'en relèvent pas, celles où les raisonnements précédents ne sont pas pertinents. Pour cela, les élèves doivent se référer soit à des connaissances sociales (le poids d'un individu n'est pas proportionnel à son âge, le prix d'un produit est proportionnel à la masse, souvent dans certaines limites), soit à des expériences proposées à l'école ou à des formules connues (ainsi, le périmètre d'un carré est proportionnel à son côté alors que ce n'est pas le cas pour son aire).
En fin de CM2, quelques problèmes de double proportionnalité ou de proportionnalité inverse (voir exemples et raisonnements, p. 23 de ce document) sont proposés.

• <u>À propos de l'utilisation de tableaux de proportionnalité</u>
Il peut paraitre commode d'utiliser un tableau pour traiter les problèmes relevant de cette notion (on parle de tableau de proportionnalité). Si cet usage n'est pas à proscrire, notamment pour mettre en forme une réponse, il doit être envisagé avec prudence.
En effet, il est plus facile pour un élève d'exprimer les étapes de son raisonnement dans un langage proche de ce qui est énoncé que sous une forme plus symbolique.
Prenons l'exemple du 1er problème envisagé résolu par « passage par l'unité ».

La mise en forme des données dans un tableau constitue une première tâche pour l'élève, difficile pour beaucoup d'entre eux si elle doit être réalisée en autonomie, par exemple sous la forme :

Nombre de réglettes	4	12
Longueur en cm	6	?

Pour une résolution par « passage par l'unité », l'élève doit modifier son tableau initial en y ajoutant une colonne… mieux placée au milieu qu'à droite du tableau !

Nombre de réglettes	4	1	12
Longueur en cm	6	?	?

Enfin, son raisonnement, de nature verbale au départ, doit être codifié en langage symbolique, par exemple sous la forme :

: 4 × 12

Nombre de réglettes	4	1	12
Longueur en cm	6	?	?

: 4 × 12

En comparant avec la description verbale donnée plus haut, on comprend que le recours au tableau ne peut pas être imposé comme un support de résolution obligé.
Des écrits comme les suivants sont plus efficaces pour de nombreux élèves et doivent

[4] Pour le problème des croissants, il est plus probable que les élèves considèrent que 200 croissants fabriqués est le double de 100 croissants fabriqués et donc qu'il en restera le double de 25, donc 50, ce qui correspond à l'utilisation de la propriété de linéarité (aspect multiplicatif).

précéder une mise en forme dans un tableau qui peut être réservée à la fin du cycle 3 :

4 réglettes mesurent au total 6 cm. 12 réglettes, c'est 3 fois 4 réglettes donc 12 réglettes mesurent 3 fois 6 cm, donc 18 cm (6 cm × 3 = 18 cm)

ou

4 réglettes → 6 cm 12 réglettes, c'est 3 fois 4 réglettes 12 réglettes → 3 × 6 cm = 18 cm

ou encore :

	4 réglettes → 6 cm
× 3	
	12 réglettes → 3 × 6 cm = 18 cm

On pourrait penser que fournir un tableau en partie complété peut être une première étape vers une généralisation de son utilisation. Il faut alors être conscient que cela revient à faire une partie du travail dévolu à l'élève, notamment quant à l'identification des grandeurs en jeu et des valeurs qui se correspondent.

Annexe 1 Typologie des problèmes du champ additif

Pour chaque type de problème, un exemple est fourni.

Il est important de noter qu'un même problème peut parfois être situé dans deux catégories différentes selon l'interprétation qui en est faite par le lecteur.
Le problème ci-contre est ainsi placé dans la catégorie « Composition de 2 transformations positives, avec recherche la transformation composée » (T^+ T^+ **T**), et peut être schématisé par :

> Zoé a gagné 13 billes ce matin, puis elle a encore gagné 7 billes cet après-midi. **Combien de billes a-t-elle gagné dans la journée ?**

$\xrightarrow{\text{gain de 13 billes}}\ \xrightarrow{\text{gain de 7 billes}}$

$\xrightarrow{\text{gain de ... billes}}$

Il pourrait être aussi placé dans la catégorie « Combinaison, avec recherche de la totalité » (P1 P2 **T**) si le lecteur considère que la quantité de billes gagnées dans la journée (T) est composée des billes gagnées le matin (P1) et des billes gagnées l'après-midi (P2), et schématisé par :

$\underbrace{\text{13 billes gagnées} \quad \text{7 billes gagnées}}_{\text{... billes gagnées}}$

Transformation (augmentation, diminution)

E_i : état initial T : transformation positive ou négative E_f : état final

E_i T^+ E_f	Transformation positive, recherche de l'état final	Alex a déjà 124 photos de Moustik. Lisa lui donne 87 nouvelles photos de Moustik. **Combien de photos de Moustik Alex a-t-il maintenant ?**
E_i T^+ E_f	Transformation positive, recherche de l'état initial	Pendant la nuit, 6 nouveaux champignons ont poussé dans le pré. Il y a maintenant 15 champignons dans le pré. **Combien de champignons y avait-il dans le pré hier soir ?**
E_i T^+ E_f	Transformation positive, recherche de la valeur de la transformation	Au début de la récréation, Lisa avait 11 billes. À la fin de la récréation, elle en a 18. **Combien de billes Lisa a-t-elle gagnées pendant la récréation ?**
E_i T^- E_f	Transformation négative, recherche de l'état final	Lisa a acheté une boite de 18 chocolats. Elle donne 12 chocolats à Alex. **Combien de chocolats lui reste-t-il ?**
E_i T^- E_f	Transformation négative, recherche de l'état initial	Alex a joué aux billes pendant la récréation. Il a perdu 7 billes. Maintenant, il a 13 billes. **Combien de billes Alex avait-il avant la récréation ?**
E_i T^- E_f	Transformation négative, recherche de la valeur de la transformation	En arrivant à l'école, le matin, Zoé a 65 billes. À midi, elle n'en a plus que 52. **Combien de billes Zoé a-t-elle perdues le matin ?**

Combinaison (réunion de 2 parties ou plus)

P_1 : première partie P_2 : deuxième partie T : totalité

P_1 P_2 T	Recherche de la totalité	Sur un parking, il y a 10 voitures blanches et 7 voitures noires. **Combien de voitures y a-t-il sur le parking ?**
P_1 P_2 T	Recherche d'une partie	Dans un pré, il y a 25 moutons. 15 moutons sont blancs, tous les autres sont noirs. **Combien de moutons noirs y a-t-il dans le pré ?**

Comparaison de 2 quantités ou de 2 grandeurs

g : grandeur la plus petite

C : comparaison positive (de plus) ou négative (de moins)

G : grandeur la plus grande

g G C^+	Comparaison positive, recherche de la plus grande valeur	Lisa a 188 perles. Zoé en a 72 de plus que Lisa. **Combien de perles Zoé a-t-elle ?**
g G C^+	Comparaison positive, recherche de la plus petite valeur	Léo mesure 124 cm. Il mesure 10 cm de plus que José. **Combien de centimètres mesure José ?**
g G C^+	Comparaison positive, recherche de la valeur de la comparaison	Lisa a rangé 75 billes dans une boite rouge et 60 billes dans une boite bleue. Il y a plus de billes dans la boite rouge que dans la boite bleue. **Combien de plus ?**
g G C^-	Comparaison négative, recherche de la plus grande valeur	Aïcha et Lou font des châteaux avec des cubes. Aïcha a utilisé 25 cubes. Elle a utilisé 10 cubes de moins que Lou. **Combien de cubes Lou a-t-elle utilisés ?**
g G C^-	Comparaison négative, recherche de la plus petite valeur	Le matin, Moustik a mangé 32 croquettes. Le soir, il a mangé 5 croquettes de moins que le matin. **Combien de croquettes a-t-il mangées le soir ?**
g G C^-	Comparaison négative, recherche de la valeur de la comparaison	Lundi, Zag a ramassé 30 brindilles. Mardi, elle a ramassé 25 brindilles. Elle en a moins ramassé le mardi que le lundi. **Combien de moins ?**

Composition de 2 transformations

T^+ : transformation positive

T^- : transformation négative

T : transformation composée (signe donné ou à déterminer)

Tous les types de problèmes possibles ne sont pas envisagés dans le tableau qui suit. Ils sont en effet très nombreux puisqu'il faut prendre en compte la valeur absolue des transformations.

T^+ T^+ T T^- T^- T	Composition de 2 transformations de même signe, recherche de la transformation composée	Zoé a gagné 13 billes ce matin, puis elle a encore gagné 7 billes cet après-midi. **Combien de billes a-t-elle gagnées dans la journée ?**
T^+ T^+ T T^- T^- T	Composition de 2 transformations de même signe, recherche de l'une des transformations.	Sophie a perdu 13 billes ce matin, puis elle a encore joué cet après-midi. Dans la journée, elle a perdu 22 billes. **Que s'est-il passé l'après-midi ?**
T^+ T^- T	Composition de 2 transformations de signes contraire, recherche de la transformation composée	Louise a gagné 15 billes ce matin, puis elle en a perdu 7 l'après-midi. **Quel est le bilan de la journée ?**
T^+ T^- T T^+ T^- T	Composition de 2 transformations de signes contraire, recherche de l'une des transformations.	José a gagné 7 billes ce matin. Il a rejoué l'après-midi. À la fin de la journée, il remarque qu'il a perdu 15 billes. **Que s'est-il passé l'après-midi ?**

Annexe 2 Typologie des problèmes du champ multiplicatif

Pour chaque type de problème, un exemple est fourni.

Réunion de plusieurs parts égales (grandeurs ou quantités identiques)

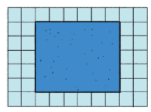
a : valeur d'une part b : nombre de parts c : valeur totale

1 → a b → c	Recherche de la valeur totale	Alex a ramassé des champignons. Il les a mis dans 4 sacs. Dans chaque sac, il y a 5 champignons. **Combien de champignons Alex a-t-il ramassés ?**
1 → a b → c	Recherche de la valeur d'une part	Arthur range ses 30 photos de footballeurs dans un album. Il colle le même nombre de photos sur chaque page. Il a rempli 5 pages. **Combien de photos Arthur a-t-il collées sur chaque page ?**
1 → a b → c	Recherche du nombre de parts	Pour son anniversaire, Lisa veut acheter 36 chocolats. Les chocolats sont vendus par sachets de 2. **Combien de sachets doit-elle acheter ?**

Ces situations sont un cas particulier de situations de proportionnalité, lorsqu'on connait la valeur associée à 1.

Configuration rectangulaire (lignes et colonnes régulières, aires de rectangles)

l : nombre de lignes c : nombre de colonnes T : nombre total d'objets

l c T	Recherche du nombre total d'objets	Les élèves de l'école ont tracé un quadrillage sous le préau. Pour préparer un jeu, Alex a posé une grande serviette sur le quadrillage. **Combien de carrés y a-t-il sur tout le quadrillage tracé par les élèves ?** 
l c T ou l c T	Recherche du nombre de lignes ou du nombre de colonnes	Un jardin rectangulaire a une aire de 72 m^2. Il mesure 9 m de long. **Quelle est sa largeur ?**

Produit cartésien

n : nombre d'occurrences d'une donnée nombre d'occurrences de l'autre donnée T : nombre total de possibilités

n p T	Recherche du nombre total de possibilités	Un restaurant propose un repas de midi avec 4 plats et 3 desserts au choix. **Combien de menus différents composés d'un plat et d'un dessert peut-on choisir ?**
n p T ou n p T	Recherche d'une des occurrences	Un restaurant propose un repas de midi avec 4 plats et des desserts. Il souhaite que ses clients puissent avoir le choix entre 12 menus différents composés d'un plat et d'un dessert. **Combien de desserts différents doit-il proposer ?**

Comparaison multiplicative

G1 : première grandeur — G2 : deuxième grandeur — C^m : comparaison du type « … fois plus », « triple »
C^d : comparaison du type « … fois moins », « tiers »

G1 G2 C^m	Comparaison de type « fois plus », recherche de la valeur multipliée	Lisa a 45 perles. Zoé en a trois fois plus (ou le triple de ce qu'a Zoé). **Combien de perles Zoé a-t-elle ?**
G1 G2 C^m	Comparaison de type « fois plus », recherche de la valeur à multiplier	Lisa a 45 perles. Elle en a trois fois plus que Zoé (ou le triple de ce qu'a Zoé). **Combien de perles Zoé a-t-elle ?**
G1 G2 C^m	Comparaison de type « fois plus », recherche de la multiplication	Lisa a 12 perles. Zoé en a 36. **Combien Zoé a-t-elle de fois plus de perles que Lisa ?**
G1 G2 C^d	Comparaison de type « fois moins », recherche de la valeur divisée	Lisa a 45 perles. Zoé en a trois fois moins (ou le tiers de ce qu'a Zoé). **Combien de perles Zoé a-t-elle ?**
G1 G2 C^d	Comparaison de type « fois moins », recherche de la valeur à diviser	Lisa a 45 perles. Elle en a trois fois moins que Zoé (ou le tiers de ce qu'a Zoé). **Combien de perles Zoé a-t-elle ?**
G1 G2 C^d	Comparaison de type « fois moins », recherche de la division	Lisa a 36 perles. Zoé en a 12. **Combien Zoé a-t-elle de fois moins de perles que Lisa ?**

Annexe 3 Typologie des problèmes relevant de la proportionnalité

Pour chaque type de problème, un exemple est fourni.

Proportionnalité simple

a et b : valeur d'une première grandeur n et p : valeur d'une deuxième grandeur

a → n b → p	Recherche d'une valeur pour la 2e grandeur	6 dictionnaires identiques pèsent ensemble 15 kg. **Quelle est la masse de 2 dictionnaires ?**
a → n b → p	Recherche d'une valeur pour la 1re grandeur	6 dictionnaires identiques pèsent ensemble 15 kg. **Combien de dictionnaires pèsent ensemble 30 kg ?**

Dans le cas particulier où a est égal à 1, on retrouve les problèmes de « réunion de plusieurs parts égales (grandeurs ou quantités identiques) » envisagés à la page 14 de ce document « Sens des opérations : multiplication et division ».

Comparaison de proportions

a et b : valeur d'une première grandeur n et p : valeur d'une deuxième grandeur

[a n] [b p]	Comparaison de 2 proportions	Dans un récipient A, on a mélangé 2 litres d'eau et 6 morceaux de sucre. Dans un récipient B, on a mélangé 6 litres d'eau et 10 morceaux de sucre. **Quel récipient contient l'eau la plus sucrée ?**
[a n] [b p]	Recherche de la valeur d'une grandeur	Dans un récipient A, on a mélangé 2 litres d'eau et 6 morceaux de sucre. Dans un récipient B, on a mis 6 litres d'eau. **Combien faut-il mettre de morceaux de sucre dans le récipient B pour que le mélange soit aussi sucré que celui du récipient A ?** Ce cas peut être vu comme un problème de proportionnalité simple.

D'autres catégories de problèmes relèvent davantage du collège, comme les **problèmes de double proportionnalité ou de proportionnalité inverse.** De premiers exemples sont étudiés en fin d'année au CM2 (unité 10).

Exemple 1 :

En ouvrant 1 robinet pendant 2 minutes, on obtient 10 litres d'eau. **Quelle quantité d'eau obtient-on en ouvrant 2 robinets identiques au précédent pendant 10 minutes ?**

Un raisonnement en 2 étapes permet de trouver la réponse :

En ouvrant 1 robinet pendant 10 minutes (5 fois 2 minutes), on obtient 50 litres d'eau (5 fois 10 litres).
En ouvrant 2 robinets pendant 10 minutes, on obtient donc 100 litres d'eau (2 fois 50 litres).

Un autre raisonnement en 2 étapes est également possible :

En ouvrant 2 robinets pendant 2 minutes, on obtient 20 litres d'eau (2 fois 10 litres).
En ouvrant 2 robinets pendant 10 minutes, on obtient donc 100 litres d'eau (5 fois 20 litres).

Exemple 2

Pour remplir une piscine en ouvrant 2 robinets identiques, il faut 12 heures. **Combien de temps faut-il pour la remplir en ouvrant 6 robinets identiques aux précédents ?**

Un raisonnement consiste à considérer qu'on a ouvert 3 fois 2 robinets et donc qu'il faut 3 fois moins de temps, donc 4 heures.
On peut aussi chercher le temps mis pour la remplir avec un seul robinet (2 fois plus de temps, donc 24 h), puis avec 6 robinets (6 fois moins de temps, donc 4 h).