

Compléments : Espace et géométrie

Pour aider à la compréhension et la mise en œuvre de nos propositions, ce document vise à expliciter les principaux enjeux d'apprentissage et les orientations de Cap Maths relatifs au développement des compétences spatiales et à la construction des connaissances géométriques.

Différents espaces et différents systèmes de repérage

Le repérage dans un espace diffère selon les caractéristiques de l'espace, la position de l'observateur par rapport à cet espace (extérieur à l'espace ou immergé dans l'espace) et selon qu'il s'effectue par rapport à un objet de cet espace ou par rapport à l'observateur.

L'espace qui nous entoure

Dans cet espace qui a trois dimensions, un objet peut être repéré :

- **par rapport à l'observateur** (*en haut, en bas, devant, derrière, à gauche, à droite*).
- **par rapport à une autre personne ou un objet orienté** (*devant, derrière, à la gauche de, à la droite de*).

EXEMPLE La plante est devant le cheval et le seau est à sa gauche.



- **par rapport à un autre objet non orienté** (*devant, derrière, à gauche de, à droite de*).

EXEMPLE Vus par l'observateur, la plante est à gauche du panier et le seau est devant le panier.



L'observateur étant immergé dans l'espace qui nous entoure, il va de soi que les apprentissages spatiaux liés à cet espace ne peuvent se réaliser que dans cet espace et non à partir de représentations de celui-ci sur une feuille.

L'espace de la feuille

Cet espace, comme le plan vertical du tableau, a une orientation conventionnelle et les mots *haut, bas, droite* et *gauche* permettent de s'y repérer. Le basculement du plan du tableau à celui de la feuille ne va pas de soi : le haut de la feuille pour l'observateur correspond à la partie de la feuille qui est la plus éloignée de lui.

Sur une ligne orientée

C'est un vocabulaire temporel qui permet le repérage : *début, fin, avant, après*.

EXEMPLE Sur la bande numérique, le chiffre 5 est après le chiffre 4.

Dans un quadrillage

On peut utiliser un repérage absolu (par exemple à l'aide de lettres et de nombres) :

- **Pour repérer une case** (ou un nœud), un système de repère étant donné.

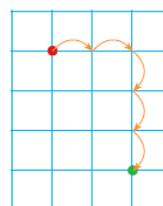
EXEMPLE L'étoile est dans la case (e, 3).

	a	b	c	d	e	f	g
1							
2							
3					★		
4							

On peut aussi utiliser un repérage relatif :

- **Pour repérer un nœud** (ou une case) relativement à un autre nœud (ou une case) :

EXEMPLE Le point vert est 2 carreaux à droite et 3 carreaux en dessous du point rouge.



La structuration de l'espace

Le travail de structuration s'effectue au travers d'activités portant d'une part, sur la **mise en place d'indicateurs spatiaux du langage** et d'autre part, sur **l'élaboration et l'utilisation de représentations planes de l'espace**. Il doit être mené en lien avec les domaines « Questionner le monde » et « Éducation physique et sportive ».

Le travail de structuration de l'espace proposé par Cap maths s'organise autour de trois compétences :

– **Situer des objets les uns par rapport aux autres ou par rapport à d'autres repères et utiliser à bon escient les indicateurs spatiaux du langage.**

Au CP, les élèves ont appris à **repérer de leur point de vue la position d'un objet par rapport des éléments fixes et à la communiquer verbalement**. Pour cela, les situations proposées étaient choisies de telle sorte que les élèves aient tous le même point de vue sur les objets.

Au CE1, ils ont **appris à imaginer ce que voit une autre personne, placée différemment d'eux**, et ainsi à mettre en relation la position d'un observateur avec le point de vue qu'il a sur une disposition d'objets.

– **S'orienter et se déplacer en utilisant des repères, décrire un déplacement.**

En CP et CE1, savoir se décentrer d'un repérage par rapport à soi pour s'imaginer à la place d'une autre personne a également été travaillé dans un quadrillage pour **communiquer des déplacements d'un personnage** en donnant dans un premier temps des indications orales, puis en les codant à l'aide d'un langage symbolique. Le travail conduit au CE2 vise à renforcer ces compétences dans des activités où il s'agit de coder des déplacements d'un personnage sur un écran à l'aide d'un **logiciel de programmation simple** (*Tracés avec GeoTortue*, unité 7 séance 9).

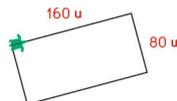
B Programmer un déplacement

Programmer un déplacement, c'est écrire une suite d'instructions. Pour écrire des instructions, il faut connaître le code :

- av suivi d'un nombre : avance du nombre d'unités indiqué
- td 90 : tourne à droite à angle droit
- tg 90 : tourne à gauche à angle droit

Le programme pour construire ce rectangle est :

av 160 ; td 90 ; av 80 ; td 90 ; av 160 ; td 90 ; av 80 ; td 90



Dico maths, cahier CE2 page 55

L'utilisation d'un plan pour repérer des positions ou se déplacer (voir paragraphe suivant) nécessite de le mettre en relation avec l'espace

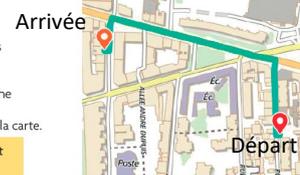
réel, de l'orienter et par conséquent de s'orienter de façon à voir les éléments représentés sur le plan comme on les voit en réalité.

B Utiliser une carte pour se déplacer

Pour suivre l'itinéraire tracé sur une carte, il faut commencer par l'orienter. Pour cela, il faut la tourner pour voir les rues ou les bâtiments représentés sur la carte comme on les voit en vrai :

- ce qui est à gauche de soi doit être à gauche sur la carte ;
- ce qui est devant soi doit être en haut sur la carte.

Il faut orienter la carte à chaque changement de direction.



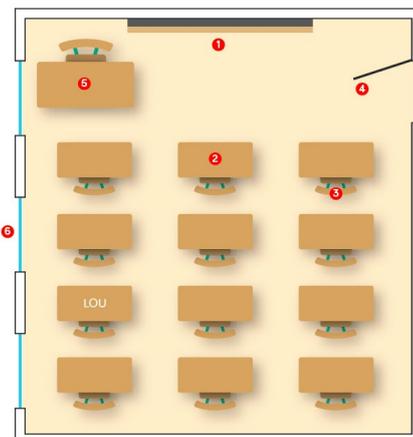
Dico maths, cahier CE2 page 68

– **Produire et utiliser des représentations d'un espace pour communiquer des positions ou un itinéraire.**

Au CP, les élèves ont produit des dessins de l'espace qui les entoure (celui de la classe) afin de **représenter la position d'un objet**. Leur exploitation a permis de dégager les caractéristiques d'une représentation plane d'un espace, notamment la similitude des formes et la conservation relative des positions. Le plan de classe qui est ensuite utilisé pour **localiser des objets** est introduit comme étant un dessin particulier où les objets sont représentés vus de dessus.

Je renforce l'essentiel

Pour les exercices 1 et 2, utilise ce plan de la classe de Lou.



1 Indique à quoi peut correspondre dans la réalité chaque objet numéroté.

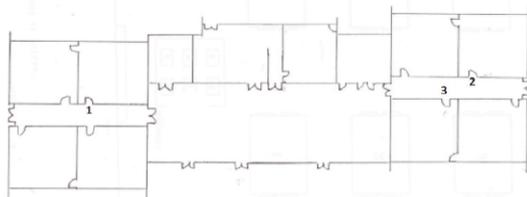
Je renforce l'essentiel, cahier CE2 page 69

Au CE1, les élèves ont eu à **retrouver la position d'un objet à partir de sa localisation sur un plan** (celui de la cour d'école).

Au CE2, le travail est conduit sur espaces plus vastes encore qui se caractérisent par le fait que **l'observateur est cette fois plongé dans un espace qu'il ne peut pas englober du regard**. Il n'y a pas de lieu où il peut se placer dans l'espace

représenté sur le plan et d'où il peut voir la totalité de cet espace. Deux situations sont proposées. Dans la première, les élèves vont avoir à utiliser une information portée sur un plan de l'intérieur des bâtiments de l'école pour retrouver un élément dans l'espace réel (*La chasse au trésor*, unité 9 séance 7).

« Chaque équipe a un code qui est différent de celui des autres équipes. Elle va devoir trouver son code.
Pour cela, je vais donner à chaque équipe un plan sur lequel figurent les numéros 1, 2 et 3. Ces numéros indiquent les emplacements des 3 symboles qui composent le code de l'équipe. »
Exemple de plan remis à une équipe :



N° 1	N° 2	N° 3

Guide CE2, unité 9 séance 7, page 332

Dans la deuxième, ils vont utiliser un plan pour indiquer ou suivre un itinéraire. Aux trois niveaux de scolarité, la réussite est conditionnée par la capacité à orienter le plan. Mais à la différence du CP et du CE1 où une seule orientation du plan suffisait pour localiser un objet, au CE2 pour effectuer un déplacement correspondant à un itinéraire tracé sur le plan, les élèves doivent procéder à une nouvelle orientation du plan à chaque changement de direction.

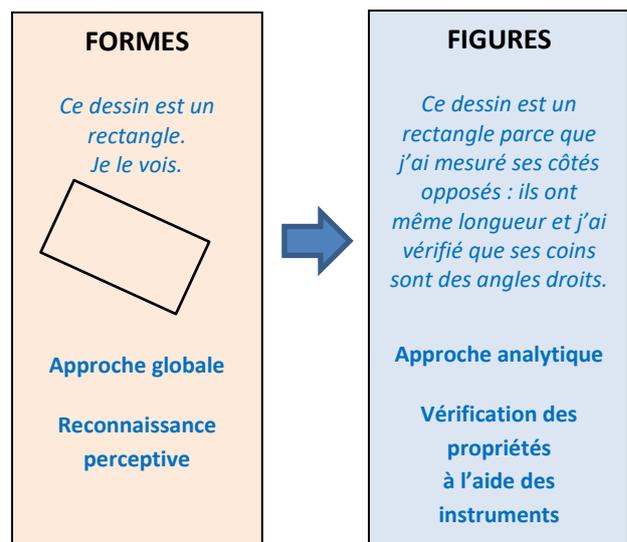
Le langage spatial verbal ou graphique

Il prend son sens dans la communication d'une localisation ou d'un déplacement entre quelqu'un qui la connaît (l'émetteur) et quelqu'un qui l'ignore (le récepteur). Dans les situations proposées, les phases de verbalisation et d'échange appuyées sur l'étude des caractéristiques de certaines locutions ou de certains dessins sont des temps importants de l'apprentissage.

La construction de connaissances géométriques

Les connaissances géométriques sont issues d'un savoir organisé en une théorie élaborée au cours de l'histoire dont le but est de résoudre des problèmes de l'espace physique rencontrés dans le cadre de pratiques professionnelles, sociales ou autres.

En CP et CE1, les élèves ont amorcé un premier basculement de l'univers des « formes » vers l'univers des « figures ». Ce basculement se caractérise par le passage d'une **appréhension globale d'une forme** à une approche **plus analytique** d'une figure. Ainsi, l'identification d'abord perceptive est complétée par une **vérification des propriétés à l'aide des instruments**.



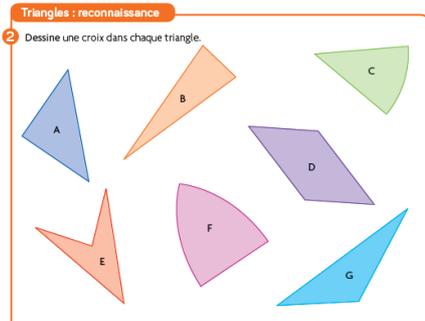
La géométrie plane

On distingue :

- **les relations** entre objets : alignement, angle droit, symétrie, égalité de longueurs...
- **les objets** eux-mêmes : les points, les segments, les droites, les figures (triangles, carrés, rectangles, cercles ou disques..., assemblages de telles figures).

Les relations permettent de caractériser les **figures planes** par ce qu'on nomme leurs propriétés. Dans le prolongement du travail engagé dans la première moitié du cycle 2, l'enjeu du CE2 est d'arriver à faire abstraction de certaines caractéristiques physiques (par exemple

un triangle peut être très aplati, un rectangle peut être très allongé) pour se centrer sur ce qui est commun à toute une classe de figures. Par exemple, toute figure tracée à la règle qui a trois sommets ou trois côtés est un triangle ; tout polygone qui a ses côtés opposés de même longueur et qui a quatre angles droits est un rectangle.



Cahier CP page 20

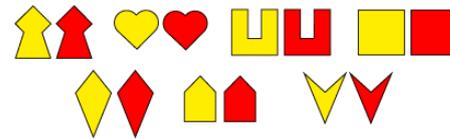
Concernant la symétrie axiale, celle-ci est abordée en cycle 2 sous son aspect global dans des activités portant sur des figures symétriques, c'est-à-dire qui ont un axe de symétrie. Elle est introduite en référence au pliage, effectif d'abord et mental ensuite, avec pour objectif de permettre aux élèves de se construire des images mentales utiles pour ensuite anticiper et contrôler leurs actions. Ainsi, en CE1, les élèves ont recherché par pliage si une figure avait un ou plusieurs de symétrie puis ils ont anticipé leur position et en CE2 ils vont compléter une figure sur quadrillage pour qu'elle soit symétrique, l'axe de symétrie étant une ligne du quadrillage. Toujours en CE2, dans le but d'aider à l'identification de figures symétriques, le lien est établi entre figure symétrique et figure qui se superpose à elle-même quand on la retourne (À l'endroit, à l'envers : tout pareil, unité 9 séance 7).

Des figures bicolores avec une face jaune et une face rouge sont remises aux élèves qui doivent :

- dans un premier temps, trouver les axes de symétrie de chaque figure ;
- dans un deuxième temps, rechercher sans retourner les figures celles qui ont leurs faces jaune et rouges identiques, qu'on peut superposer.

Après exploitation des productions, le constat est fait que « **Le recto et le verso d'une figure symétrique sont superposables.** »

Figures symétriques



Figures qui ne sont pas symétriques



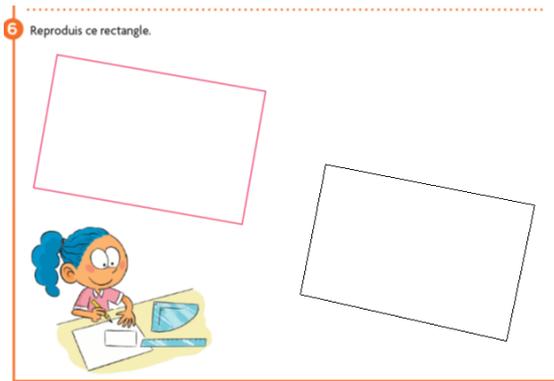
Guide CE2, unité 8 séance 7, page 301

La construction des savoirs géométriques va de pair avec l'utilisation des instruments et outils appropriés et est étroitement liée à leur choix :

- la règle pour vérifier et produire des alignements ;
- le double-décimètre pour mesurer ou construire un segment de longueur donnée ;
- l'équerre pour vérifier ou construire un angle droit ;
- le compas pour tracer un cercle ou vérifier qu'une ligne a une courbure constante. Plus tard, en CM1 il sera également utilisé pour reporter une longueur ;
- le calque pour déterminer si une figure est symétrique ou pour compléter une figure pour qu'elle soit symétrique.

Des activités comme la reproduction d'une figure et la validation d'une production par comparaison à la figure à reproduire à l'aide d'un calque incitent les élèves à s'appliquer, à améliorer la précision de leurs tracés et ainsi à développer leur maîtrise des instruments.

La précision des tracés, si elle est essentielle dans certaines tâches manuelles, ne doit pas occulter l'enjeu de l'enseignement qui est de développer des savoirs théoriques sur des objets et relations géométriques. Pour ce faire, il est important d'aller au-delà d'une validation qui ne serait que matérielle et de mettre en débat les procédures de construction. En effet, si on prend l'exemple de la reproduction d'un rectangle, l'observation conduit à conclure que la construction ci-dessous est incorrecte mais elle ne permet pas de se prononcer sur la validité de la procédure utilisée.



Cahier CE2, page 28

Un élève a pu réaliser une production proche de la figure à reproduire en plaçant la règle à vue pour orienter les côtés comme sur la figure sans avoir repéré la présence d'angles droits. Alors que la production d'un autre élève sera plus éloignée de la figure du fait d'un manque de dextérité dans l'utilisation des instruments et bien qu'il ait repéré et utilisé les propriétés de la figure (longueurs des côtés et angles droits).

Les solides

Le travail sur les solides est conduit dans le même esprit. Les situations proposées nécessitent de **passer d'une reconnaissance globale à une connaissance plus analytique** : un polyèdre était jusque-là caractérisé par la forme de ses faces et le nombre de faces de chaque forme ; en CE2, il l'est aussi par le nombre de ses sommets, le nombre et la longueur de ses arêtes.

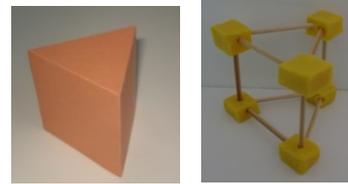
En CE2, l'étude porte sur les mêmes solides qu'en CE1, cylindre, cône, boule, cube, pavé droit, pyramide dont la connaissance est renforcée et développée.

Les problèmes en géométrie

Que ce soit en géométrie plane ou pour l'étude des solides, les propriétés sont mises en évidence puis mobilisées dans des problèmes où leur utilisation est rendue nécessaire : problèmes de reproduction, de construction, d'identification, de description. En cela, les problèmes jouent un rôle déterminant dans la construction, l'appropriation et le réinvestissement des savoirs.

Arêtes et sommets d'un polyèdre

Dans un premier temps, l'enseignant présente ce qu'on appelle squelette d'un polyèdre.



Dans un deuxième temps, les élèves se voient remettre une pyramide et en construisent le squelette avec des tiges de différentes longueurs et des boules mises à leur disposition.

Dans un troisième temps, un pavé droit leur est remis :



Ils doivent passer commande des tiges et boules nécessaires pour en construire le squelette :

	Tiges de 4 cm	Tiges de 6 cm	Tiges de 8 cm	Tiges de 12 cm	Boules
Nombre					

Après discussion et validation des commandes, est dégagé ce qui doit être retenu :

EXPLICITATION, VERBALISATION

- ▶ Les boules correspondent à ce qu'on appelle **les sommets** du polyèdre.
- ▶ Les tiges correspondent à ce qu'on appelle **les arêtes** du polyèdre.
Les montrer sur les deux pavés droits.
- ▶ Pour prévoir les tiges et boules nécessaires pour construire un squelette d'un polyèdre, il faut sur le polyèdre :
 - mesurer les longueurs de ses arêtes ;
 - compter le nombre d'arêtes de chaque longueur ;
 - compter le nombre de sommets.
 Il faut s'organiser pour ne pas oublier ou compter plusieurs fois une arête ou un sommet.

Guide CE2, unité 6 séance 8, page 236