Annexe

ASPECTS MATHÉMATIQUES DES FRACTIONS ET DES NOMBRES DÉCIMAUX

Ce texte complète les « Éclairages sur nombres rationnels, fractions et nombres décimaux » de la période 2 (p. 99). Ses buts sont de préciser les propriétés, les règles de calcul, et de clarifier les relations entre les nombres rationnels, les fractions et les nombres décimaux, ainsi que leurs écritures, tout en restant dans le cadre nécessaire à la connaissance de notions abordées au primaire, voire aux questions que des élèves curieux pourraient poser.

L'étude des fractions et des nombres décimaux, abordée au CM1, sera poursuivie au collège par celle les nombres rationnels.

LES NOMBRES RATIONNELS

Les additions, soustractions, multiplications avec les nombres entiers, produisent des résultats qui sont aussi des nombres entiers. Ce n'est pas le cas pour la division pour laquelle le quotient de deux nombres entiers n'aboutit pas toujours à un résultat entier (par exemple 8 : 20 = 0,4 ou 4 : 12 = 0,333…)

Il a donc été nécessaire de définir un nouvel ensemble de nombres dans lequel la solution de l'équation $b \times x = a$, a et b étant des entiers (b non nul) a toujours une solution qui est un **nombre rationnel** et que l'on écrira sous la forme d'une **fraction** d'entiers notée $\frac{a}{b}$.

Exemples : L'équation $3 \times x = 2$ a pour solution le rationnel noté $\frac{2}{3}$. L'équation $4 \times x = 12$ a pour solution le rationnel noté $\frac{12}{4}$; mais dans l'ensemble des entiers, on sait que : $4 \times 3 = 12$ donc $\frac{12}{4} = 3$; **les entiers sont des rationnels.**

Nombre rationnel et fraction

L'équation $12 \times x = 4$ a pour solution le rationnel noté $\frac{4}{12}$; par division ou multiplication des deux termes de cette équation par un même nombre on obtient des équations dont les solutions sont des fractions équivalentes :

$6 \times x = 2$ solution : $\frac{2}{6}$

$3 \times x = 1$ solution : $\frac{1}{3}$

$36 \times x = 12$ solution : $\frac{12}{36}$

On peut donc écrire : $\frac{4}{12} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \frac{12}{36}$

Deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ définissent donc le même rationnel si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; soit $ad - bc = 0$. Pour chaque rationnel, il y a donc une infinité de fractions équivalentes qui, sur l'exemple précédent de $\frac{1}{3}$, seraient de la forme $\frac{n}{3n}$ (n étant un entier non nul).

Fraction irréductible

Lorsque l'on divise par un même nombre le numérateur et le dénominateur d'une fraction, on parle de **simplification**. Cette opération vise à obtenir des expressions plus simples d'un rationnel donné ; cette simplification aboutit à l'obtention d'une fraction dite **irréductible**, tel que $\frac{1}{3}$ dans l'exemple précédent. Pour chaque rationnel, il existe une seule fraction irréductible (appelée aussi « fraction réduite ») : le numérateur et le dénominateur n'ont qu'un seul diviseur en commun : le nombre 1 ; on dit qu'ils sont premiers entre eux.

Par exemple, nous avons les égalités :

$\frac{18}{40} = \frac{9}{20}$ (fraction irréductible)

$\frac{363}{220} = \frac{3 \times 11 \times 11}{2 \times 2 \times 5 \times 11} = \frac{3 \times 11}{2 \times 2 \times 5} = \frac{33}{20}$ (fraction irréductible)

Nombre décimal

Un nombre rationnel x (une fraction $\frac{a}{b}$) est un nombre décimal s'il existe une puissance de 10 (notée ici 10^n) telle que $x \times 10^n$ soit un entier.

Par exemple : $\frac{33}{20} \times 10^2 = 165$; $\frac{33}{20} = 1{,}65$.

$\frac{33}{20} = \frac{3 \times 11}{2 \times 2 \times 5}$ est aussi égal à $\frac{3 \times 11 \times \mathbf{5}}{2 \times 2 \times 5 \times \mathbf{5}}$ soit $\frac{165}{100}$; $\frac{33}{20}$ peut alors s'écrire sous la forme d'une fraction d'entiers $\frac{165}{100}$, dont le dénominateur est une puissance de 10. L'écriture décimale de $\frac{33}{20}$ est 1,65. Le rationnel dont l'écriture fractionnaire irréductible est $\frac{33}{20}$ est donc un nombre décimal.

Écriture décimale

Prenons l'exemple de $\frac{33}{20}$; ce nombre rationnel a un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule, son écriture décimale 1,65 est finie, puisque :

- d'une part, en faisant la division, à partir du troisième rang de décimales du quotient, le reste est nul et donc les chiffres des rangs suivants sont des zéros qu'il n'est pas utile d'écrire ;
- d'autre part, une fraction comme $\frac{33}{20} = \frac{3 \times 11}{2 \times 2 \times 5}$ est aussi égale à $\frac{3 \times 11 \times \mathbf{5}}{2 \times 2 \times 5 \times \mathbf{5}}$ soit $\frac{165}{100}$ c'est-à-dire 1,65.

Pour qu'une fraction quelconque étant ramenée à une fraction égale irréductible $\frac{a}{b}$ puisse s'écrire sous la forme d'un nombre décimal, il faut que le dénominateur de cette dernière ne comporte que des facteurs 2 ou 5. En effet, multiplier par 10^n revient à multiplier par $(2 \times 5)^n$ donc par $2^n \times 5^n$. Si le dénominateur d'une fraction irréductible comporte comme facteur un autre nombre que 2 ou 5, la fraction ne pourra pas s'écrire sous la forme d'un nombre décimal (exemple : $\frac{1}{3}$).

Un décimal peut être représenté par une écriture à virgule ne comportant qu'un nombre fini de décimales non nulles ou par une fraction dont le dénominateur est le produit d'une puissance de 2 par une puissance de 5 (ou une puissance de 10).

PROPRIÉTÉS DES NOMBRES RATIONNELS

Les rationnels vérifient les propriétés suivantes :

- Deux rationnels étant donnés, il est toujours possible de trouver le plus grand : l'ensemble des nombres rationnels est totalement ordonné (idem pour les décimaux).
- Entre deux rationnels, on peut toujours en intercaler d'autres – en fait, une infinité – (idem pour les décimaux).
- La somme, la différence, le produit de deux rationnels sont des rationnels (idem pour les décimaux) ; le quotient de deux rationnels est un rationnel (alors que le quotient de deux décimaux n'est pas toujours un décimal). Les techniques de calculs correspondant à ces différentes opérations sur les rationnels font l'objet d'un apprentissage au collège. Nous ne développerons donc pas cet aspect ici.
- Il est possible d'encadrer un rationnel non décimal entre deux décimaux (au dixième, centième... près).

Un nombre entier a un successeur (après 7, il y a 8), mais cette idée de « successeur » n'a plus de sens pour les rationnels et les décimaux : quel décimal viendrait après 2,75 ? serait-ce 2,751 ? ou 2,75001 ? ou 2,750000001 ?

Remarquons, pour clore cette brève présentation, que si l'ensemble des nombres rationnels (noté Q) prolonge l'ensemble des entiers (noté N) – on dit que N est inclus dans Q –, il devra lui aussi être prolongé par d'autres ensembles de nombres pour résoudre des problèmes qui n'ont pas de solution dans Q.

L'ENSEMBLE DES NOMBRES DÉCIMAUX

La somme, la différence, le produit de deux décimaux sont des décimaux. Par définition, les décimaux sont des rationnels particuliers ; ceci a pour conséquence que l'on peut ordonner un ensemble de nombres décimaux. De plus, entre deux décimaux, on peut toujours intercaler une infinité de décimaux : c'est ce que l'on nomme la densité de D.
En revanche, le quotient de deux décimaux, comme celui de deux entiers, n'est pas toujours un décimal. Par exemple, $\frac{1}{3}$ = 0,333… La suite des 3 dans cette écriture est infinie.

Écriture à virgule d'un nombre décimal

Notre système de numération est décimal et positionnel ; ce qui veut dire que :

- la base de numération est dix (on utilise au plus dix symboles pour écrire n'importe quel nombre) ;
- chaque symbole prend une valeur différente selon la place qu'il occupe dans l'écriture d'un nombre.

L'écriture générale d'un nombre entier prend donc la forme : $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$.

Pour exprimer des quantités inférieures à un, tout en gardant le principe de la base décimale, il est possible de « prolonger vers la droite » l'utilisation des puissances de 10, celles-ci sont évidemment des puissances négatives de 10.
L'écriture générale d'un nombre décimal prend donc la forme suivante : $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \ldots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0 + b_1 \times 10^{-1} + b_2 \times 10^{-2} + \ldots + b_{m-1} \times 10^{-(m-1)} + b_m \times 10^{-m}$.
Un nombre décimal est donc composé d'une partie entière (représentée par les chiffres de a_n à a_0) et d'une partie décimale (représentée par les chiffres de b_1 à b_m).
On utilise ainsi les puissances successives de la base dix pour exprimer un nombre décimal. Il est alors commode d'utiliser seulement le rang occupé par chaque chiffre pour indiquer la puissance de 10 auquel il est fait référence : $a_n, a_{n-1} \ldots a_2, a_1, a_0, b_1, b_2 \ldots b_{m-1}, b_m$.

Décimaux et rationnels

Les entiers sont des décimaux. Les décimaux sont des rationnels ; mais il y a des rationnels qui ne sont pas des décimaux.
Prenons par exemple x, vérifiant l'équation $7 \times x = 3$;
$x = \frac{3}{7}$ = 0,428571428571..., qui peut être obtenu par la division de 3 par 7:

30	7
-28	0,428571
20	
-14	
60	
-56	
40	
-35	
50	
-49	
10	
-7	
3	

À partir du dernier reste écrit, 3, la recherche du chiffre suivant du quotient va produire la même suite de chiffres au quotient et de restes que dans la première division de 3 par 7 ; donc $\frac{3}{7}$ = 0,428571428571...

Dans l'exemple cité, les restes successifs de la division par 7 (surlignés en jaune et vert) sont nécessairement inférieurs à 7 {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} et ne peuvent prendre qu'une de ces sept valeurs ; donc au bout d'au plus 7 divisions, 0 ou un des restes rencontrés auparavant apparait. Si le reste 0 n'apparait pas, la suite des chiffres se reproduit indéfiniment. Ainsi, la solution de l'équation peut se traduire par une écriture à virgule périodique et illimitée de période 428571.

On peut écrire : $\frac{3}{7} = 0,\underline{428571}...$

Ce raisonnement peut être repris en généralisant pour $\frac{a}{b}$ par la division de a par b. Dans la division euclidienne de a par b, $a = bq + r$ (avec $b \neq 0$ et $0 \leq r < b$), r ne peut prendre que b valeurs {0, 1… b-1}.

Conclusion : si tout décimal est un rationnel, l'inverse n'est pas toujours vrai ; l'ensemble des décimaux est un sous-ensemble des nombres rationnels. L'ensemble des nombres décimaux est noté D. D est inclus dans Q.

Écriture décimale d'un rationnel

Dans l'écriture décimale des nombres, on peut distinguer trois cas :

- celui où l'écriture est finie comme dans 2,4 : il s'agit d'un rationnel décimal ;
- celui où l'écriture est infinie mais périodique comme dans 0,428571428571… Il s'agit d'un rationnel ; celui-ci n'est un nombre décimal que lorsque la période est 9 (exemple : 0,9999…). La réciproque est vraie : toute suite décimale illimitée périodique correspond à un rationnel.[1]
- celui où l'écriture est infinie et non périodique comme c'est le cas dans l'écriture de π (π = 3,14159265358979323846264338327950288…) Il s'agit d'un nombre irrationnel. Autre exemple : l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans Q, $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel ; il en est de même pour le nombre formé par la suite de chiffres après la virgule constituée par un 0 et un 1, puis deux 0 et deux 1, puis trois 0 et trois 1… (0,010011000111000001111…) ; cette suite n'est pas, par construction, périodique. Une écriture infinie non périodique correspond à un nombre irrationnel.

À QUOI SERVENT LES NOMBRES DÉCIMAUX ?

En réponse à cette question, on pense évidemment au domaine de la mesure. Si l'on effectue des mesures à l'aide d'instruments dont la précision est limitée, en utilisant un système d'unités fondé sur le système décimal et en privilégiant l'une des unités, les résultats peuvent facilement être exprimés par des décimaux.

Par exemple, la diagonale d'un carré de côté 4 cm mesure 5,66 cm, si on la mesure avec un instrument dont la précision est de l'ordre du dixième de millimètre. Cependant, le mathématicien sait très bien qu'on n'exprime pas ainsi la longueur exacte de cette diagonale. En effet, l'utilisation du théorème de Pythagore permet d'obtenir cette longueur exacte qui s'exprime par le nombre réel $4\sqrt{2}$, qui n'est pas exprimable par un décimal, mais peut être approché d'aussi près que l'on veut par un décimal :

- $5,6 < 4\sqrt{2} < 5,7$;
- $5,65 < 4\sqrt{2} < 5,66$;
- $5,656 < 4\sqrt{2} < 5,657$; etc.

Les nombres décimaux, qui ont été conçus dès l'origine pour faciliter les écritures et les calculs, sont ainsi des nombres utiles pour :

- exprimer le résultat d'un mesurage effectif (avec un instrument) après le choix d'une unité adaptée ;
- approcher tout quotient d'entiers (tout rationnel) d'aussi près que l'on veut ;
- approcher également tout réel d'aussi près que l'on veut, et donc graduer aussi « finement » que l'on veut la droite numérique.

L'intérêt essentiel des décimaux vient du fait qu'il est possible d'opérer sur eux avec les mêmes règles de calcul que sur les entiers (moyennant des règles de positionnement de la virgule).

ÉCRITURES À VIRGULE SELON LA BASE

Nous avons vu que certains nombres rationnels peuvent s'écrire sous la forme d'un nombre décimal, avec donc, par définition, un nombre fini de chiffres après la virgule, alors que pour d'autres, leur écriture contient une suite illimitée périodique. Pour quelle raison cette différence apparait-elle lorsque l'on passe de l'écriture d'un rationnel sous une forme fractionnaire à une écriture à virgule ?

Reprenons la première phase de la situation DROITE GRADUÉE (p. 106), dans laquelle les élèves ont à placer des fractions sur chacune de trois droites ou figurent des traits espacés régulièrement, chaque unité comportant des repères l'une en tiers, l'autre en cinquièmes, la troisième en dixièmes. Bien entendu, ce sont des fractions que les élèves de CM1 ont à placer, et non des écritures avec des virgules ; d'ailleurs les seules écritures à virgule qui seront enseignées au primaire seront les écritures décimales, dont la signification est étudiée dans cette situation à partir des fractions décimales.

[1] Pour aller plus loin, consulter Perrin D. (2005), *Mathématiques d'école*, Cassini ed., p. 75 et suivantes.

Mais si nous restons dans la logique de la première graduation (celle qui utilise des tiers) nous pourrions nous interroger sur la façon d'écrire ces fractions dans une numération de position en base trois, où les groupements s'effectuent selon les puissances de trois (et non de dix comme dans notre système décimal) et où les chiffres sont {0, 1 et 2}.

Les écritures à virgule en base trois

Dans cette base l'écriture d'un nombre entier prend donc la forme : $a_n \times 3^n + a_{n-1} \times 3^{n-1} + \ldots + a_2 \times 3^2 + a_1 \times 3^1 + a_0 \times 3^0$, avec cette fois les chiffres $\{a_n, a_{n-1} \ldots a_2, a_1, a_0\}$ prenant les valeurs 0, 1 ou 2. Pour exprimer des quantités inférieures à 1, tout en gardant le principe de la base trois, quels seraient les nombres engendrés par les partages successifs en 3 ?

Considérons le partage de l'unité : les sous-unités produites par des partages successifs seront donc d'abord des tiers ($\frac{1}{3} = 3^{-1}$), puis des neuvièmes ($\frac{1}{9} = 3^{-2}$), des vingt-septièmes ($\frac{1}{27} = 3^{-3}$)…

Un tiers s'écrit : $0{,}1\ ^{\text{trois}}$; deux tiers : $0{,}2\ ^{\text{trois}}$; et bien sûr trois tiers : $1\ ^{\text{trois}}$. Nous voyons que $\frac{1}{3}$ dont l'écriture à virgule en base dix est une suite décimale périodique illimitée (0, 333…) s'écrit avec un seul chiffre après la virgule en base trois.

Un neuvième s'écrit : $0{,}01\ ^{\text{trois}}$; deux neuvièmes : $0{,}02\ ^{\text{trois}}$; quatre neuvièmes ($\frac{1}{3} + \frac{1}{9}$) : $0{,}11\ ^{\text{trois}}$. Un vingt-septième s'écrit : $0{,}001\ ^{\text{trois}}$, deux vingt-septièmes : $0{,}002\ ^{\text{trois}}$…

L'écriture générale d'un nombre en base trois prend donc la forme suivante : $a_n \times 3^n + a_{n-1} \times 3^{n-1} + \ldots + a_2 \times 3^2 + a_1 \times 3^1 + a_0 \times 3^0 + b_1 \times 3^{-1} + b_2 \times 3^{-2} + \ldots + b_{m-1} \times 3^{-(m-1)} + b_m \times 3^{-m}$, les chiffres $\{a_n, a_{n-1} \ldots a_2, a_1, a_0\}$ et $\{b_1, b_2 \ldots b_{m-1}, b_m\}$ prenant les valeurs 0, 1 ou 2.

Quelle écriture à virgule pour un demi en base trois ?

De même, quelle serait l'écriture en base trois de $\frac{1}{2}$?

Si nous encadrons $\frac{1}{2}$, déterminons les chiffres successifs de son écriture en base trois.

Un demi est compris entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, donc entre $0{,}1\ ^{\text{trois}}$ et $0{,}2\ ^{\text{trois}}$; son écriture commence par 0,1.

Un demi est compris entre $\frac{4}{9}$ et $\frac{5}{9}$, donc entre $0{,}11\ ^{\text{trois}}$ et $0{,}12\ ^{\text{trois}}$; son écriture commence par 0,11.

Un demi est compris entre $\frac{13}{27}$ et $\frac{14}{27}$, donc entre $0{,}111\ ^{\text{trois}}$ et $0{,}112\ ^{\text{trois}}$; son écriture commence par 0,111.

D'une façon générale, un demi est compris entre $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^m}$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{2}{3^m}$, ce qui peut s'écrire aussi entre $1 \times 3^{-1} + 1 \times 3^{-2} + \ldots + 1 \times 3^{-m}$ et $1 \times 3^{-1} + 1 \times 3^{-2} + \ldots + 2 \times 3^{-m}$; le m-ième chiffre après la virgule sera donc un 1.

Un demi s'écrit en base trois sous la forme d'une suite décimale illimitée 0,1111… alors qu'il s'écrit 0,5 dans notre système décimal.

Le rôle de la base

Le fait qu'un nombre rationnel s'écrive avec un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule ou sous la forme d'une suite illimitée ne dépend que de la base choisie. Ainsi les nombres décimaux sont des nombres intrinsèquement liés à la base dix.

La terminologie employée fournit aussi une indication : les ensembles de nombres étudiés dans la scolarité (primaire et secondaire) – « entiers », « rationnels » ou « réels » – ne font pas référence à une base de numération contrairement à « décimaux » qui se rapportent à la base dix[2]. Les nombres « entiers », « rationnels » ou « réels » sont définis indépendamment de la base dans laquelle on les écrit.

[2] Voir aussi l'article de Robert Neyret sur les décimaux dans *Grand N* n° 17, IREM de Grenoble (1979).