Les enjeux de la numération : nombres entiers, fractions et décimaux

Les nombres sont utilisés pour exprimer des quantités, puis des grandeurs (longueurs, masses…) par dénombrement d'unités choisies. Pour une quantité importante, les groupements par dizaines, centaines, milliers, puis millions permettent d'obtenir rapidement l'écriture en chiffres du nombre entier. Le fractionnement de l'unité en parts égales donne sens à l'écriture fractionnaire d'autres nombres (les fractions et les décimaux) qui permettent d'exprimer des mesures non entières de quantités ou de grandeurs.

Au CM1, les élèves consolident leurs connaissances acquises au cycle 2 relatives aux **nombres entiers** inférieurs ou égaux à 10 000 et ils les prolongent **jusqu'au million** :
– Ils utilisent et représentent ces nombres et savent les écrire sous la dictée ou lire leur écriture chiffrée.
– Ils connaissent les unités de la numération décimale (unités simples, dizaines, centaines, milliers, millions) et les relations qui les lient.
– Ils comprennent la signification des chiffres ou des groupements de chiffres dans leur écriture chiffrée.
– Ils les comparent, les rangent, les encadrent, les repèrent et les placent sur une demi-droite graduée.

Ils étendent ces connaissances aux **nombres décimaux** pour effectuer les mêmes tâches en utilisant de nouvelles unités de numération (dixièmes, centièmes) construites à partir du fractionnement de l'unité. Ils connaissent et emploient **diverses désignations orales et écrites** d'un nombre décimal (fractions décimales, écritures à virgule, décompositions additives et multiplicatives).
Le travail sur les nombres décimaux prend appui sur une première étude des fractions.

Dans le cadre de partages de grandeurs ou de mesures de grandeurs, ils utilisent donc des **fractions simples**, et des **fractions décimales** (jusqu'au centième) qui acquièrent ainsi progressivement le statut de nombre.
– Ils les désignent oralement, par écrit et les décomposent sous forme additive.
– Ils les encadrent par deux entiers successifs et les positionnent sur une droite graduée
– Ils comparent ou ajoutent des fractions décimales de même dénominateur.

Numération décimale

Notre système d'expression des nombres entiers en chiffres possède deux caractéristiques dont la maitrise est essentielle pour comprendre et apprendre les notions relatives aux nombres, aux calculs et à la mesure :
– Ce système est positionnel : la valeur d'un chiffre est déterminée par sa place par rapport à l'unité dans l'écriture du nombre.
Pour 1 325, le 3 se situe au 3ᵉ rang vers la gauche en partant de l'unité, il représente donc 3 centaines.
– Ce système est décimal : les différentes unités de numération[1] sont liées entre elles par des relations qui correspondent à des groupements par 10. Ainsi,
- 1 dizaine = 10 unités ;
- 1 centaine = 10 dizaines

et donc 1 centaine = 100 unités ;
- 1 millier = 10 centaines

et donc 1 millier = 1 000 unités.
L'expression des grands nombres est organisée par classe de trois unités de numérations construites sur le même modèle, sur la base de groupements auxiliaires par 1 000 (milliers, millions, milliards…).

[1] Le mot *unité* a plusieurs significations. Il désigne d'une part la valeur choisie comme unitaire (ce qui sera le « un » : *une unité simple* dans cent-vingt-cinq, *un million* dans cent-vingt-cinq millions), et, d'autre part, les différentes unités du système (unité, dizaine, centaine, millier, million). On parle alors *d'unités de numération*.

millions			milliers			unités simples		
centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités
				4	0	7	6	3
					40	7	6	3
						407	6	3

Ces unités de numération permettent d'exprimer des **quantités ou des grandeurs** (8 millions d'habitants, 3 mille kilomètres...). Elles permettent également d'exprimer des nombres sous diverses formes : 4 dizaines de milliers 7 centaines 6 dizaines 3 unités ou 40 mille 763 unités ou 407 centaines et 63 unités... et les relations entre elles sont utiles aux conversions : 4 dizaines de milliers et 763 unités = 40 milliers et 763 unités

– Ce système se prolonge aux nombres décimaux en introduisant de nouvelles unités de numération (dixièmes, centièmes ...), fractions décimales (c'est-à-dire issues du partage en 10, 100 parties égales) d'une unité simple et liées également entre elles par des relations décimales : 1 unité = 10 dixièmes ; 1 dixième = 10 centièmes et donc 1 unité = 100 centièmes.

millions			milliers			unités simples					
centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités	centaines (100)	dizaines (10)	unités (1)	dixièmes $(\frac{1}{10})$	centièmes $(\frac{1}{100})$	...
						4	0	7 ,	**6**	3	

Dans l'écriture à virgule, la valeur d'un chiffre est, comme pour les entiers, déterminée par le rang qu'il occupe dans l'écriture chiffrée (le chiffre 6 vaut 6 dizaines dans 40 763 et il vaut 6 dixièmes dans 407,63). **Il en est de même pour celle des groupements de chiffres** (407 vaut 407 centaines dans 40 763 et il vaut 407 unités dans 407,63).

La différence principale réside dans le fait que pour les nombres entiers, le chiffre des unités est le chiffre le plus à droite (c'est 3 dans 40 703) alors que pour les nombres décimaux (non entiers) le chiffre des unités est signalé par la virgule : c'est le chiffre situé immédiatement à gauche de la virgule (c'est 7 dans 407,63). À cet égard, il faut insister sur le rôle de la virgule. Contrairement à ce qui est fréquemment exprimé, **la virgule n'est pas un « séparateur »** : elle ne sépare pas la partie entière de la partie décimale.

Exemple : Si pour **407,63** la partie entière est bien **407**, la partie décimale n'est pas 63, mais **0,63** et 407,63 est égal à la somme de sa partie entière et de sa partie décimale : 407,63 = 407 + 0,63.

Il est plus correct d'affirmer que **la virgule est « un indicateur »** : elle indique quel est le chiffre des unités et, à partir de là, permet de trouver la valeur de tous les autres chiffres.

Un autre enjeu réside dans **l'apprentissage de la désignation verbale des nombres (orale et écrite en lettres)** et de ses liens avec la désignation en chiffres. Ainsi, l'écriture chiffrée des grands nombres, en groupes espacés de 3 chiffres à partir de la droite, fournit une aide à cette verbalisation. De même une lecture signifiante des écritures à virgule (une unité et deux centièmes ou cent-deux centièmes pour 1,02) rappelle et ancre leur nature décimale.

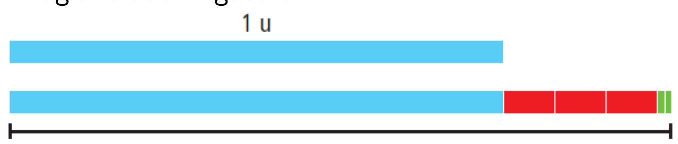
Les représentations des nombres

Pour représenter un nombre plusieurs registres peuvent être utilisés.

Exemple avec le nombre **1,32**.

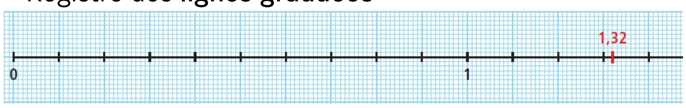
- **Registres figurés**

– Registre des longueurs



La longueur du segment est obtenue en mettant bout à bout :
1 segment de longueur 1 u, 3 segments de longueur $\frac{1}{10}$ u et 2 segments de longueur $\frac{1}{100}$ u.

– Registre des **lignes graduées**



Le repère associé à 1,32 se trouve à 3 dixièmes et 2 centièmes après 1.

• Registres verbaux
Expressions signifiantes : 1 et 3 dixièmes et 2 centièmes ou 1 et 32 centièmes ou 132 centièmes.
La formulation 1 virgule 32 contribue à ce que l'élève conçoive le nombre décimal comme la juxtaposition de deux entiers ce qui génère de nombreuses erreurs dans les exercices de comparaison ou de calcul. Son usage doit être donc limité (voire prohibé au CM1) et les lectures signifiantes privilégiées.

• Registres symboliques
Écriture **1,32** associée à $1 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100}$ ou $1 + \frac{32}{100}$ ou $\frac{132}{100}$

La progression de Cap Math CM1 construit en permanence des ponts entre ces différents registres pour aider les élèves à une meilleure conceptualisation des nombres.

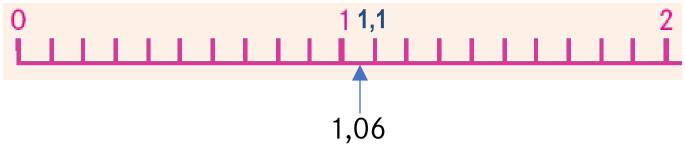
La comparaison des nombres en écriture décimale

On enseigne souvent deux procédures différentes pour la comparaison des nombres entiers et pour celle des nombres décimaux. **Nous avons, au contraire, choisi une procédure plus simple, valable pour ces deux types de nombres** et qui peut être expliquée et comprise facilement à partir des connaissances des élèves relatives à la numération décimale.
Exemples
2 016 > **203** → parce que **2 016** comporte des milliers alors que **203** n'en comporte pas.
20,16 < **20,3** → parce que **20,16** et **20,3** comportent le même nombre de dizaines et d'unités, mais que **20,16** comporte moins de dixièmes que **20,3** (et que 6 centièmes c'est moins que 1 dixième).

Dans tous les cas, il s'agit de **parcourir les écritures chiffrées des deux nombres à partir du chiffre de rang le plus élevé** (donc à partir de la gauche) et de conclure dès qu'apparaissent deux chiffres différents (203 ne comportant pas de millier peut être considéré comme 0 203). La question de la longueur des écritures (même si elle peut devenir une règle commode pour les nombres entiers) ou encore de la distinction entre parties à gauche et à droite de la virgule (pour les nombres décimaux) n'intervient donc pas.

Seule la valeur positionnelle des chiffres est utilisée dans ces deux domaines numériques.

La différence essentielle entre nombres entiers et nombres décimaux concerne la **question de l'intercalation** de nombres entre deux nombres donnés. Entre deux nombres entiers, il existe un nombre limité de nombres entiers (aucun si les deux nombres sont consécutifs) alors qu'il en existe toujours une infinité entre deux nombres décimaux et la notion de nombres décimaux consécutifs n'a pas de sens.
Le travail sur des lignes graduées permet de renforcer la maitrise de la comparaison des nombres et des questions liées à l'intercalation.
Exemple :
Placer approximativement 1,06 sur une ligne graduée en dixièmes nécessite d'effectuer deux comparaisons pour intercaler ce nombre entre 1 et 1,1 : 1 < 1,06 < 1,1.

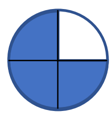


L'apprentissage des fractions au CM1

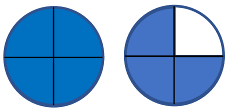
L'enjeu principal de l'enseignement des fractions à l'école primaire est de fournir un outillage pour la compréhension des écritures à virgule des nombres décimaux, et en CM1 des expressions en dixièmes, centièmes.
Nous avons choisi de prendre appui sur **le partage de l'unité en demis, quarts, dixièmes, centièmes... dans des situations de mesure de longueurs, pour donner une signification** aux fractions, comme aux fractions décimales, en présentant $\frac{7}{4}$ comme *sept quarts* (7 fois un quart de l'unité) ou $\frac{13}{10}$ comme *treize dixièmes* (13 fois un dixième de l'unité).

La fraction est parfois d'abord présentée en tant qu'expression d'une proportion :

$\frac{3}{4}$ comme 3 parts coloriées sur 4 parts identiques.



Cette présentation, de prime apport facile d'accès, rend difficile l'expression de quantités supérieures à 1, comme dans l'exemple ci-contre où la proportion est de

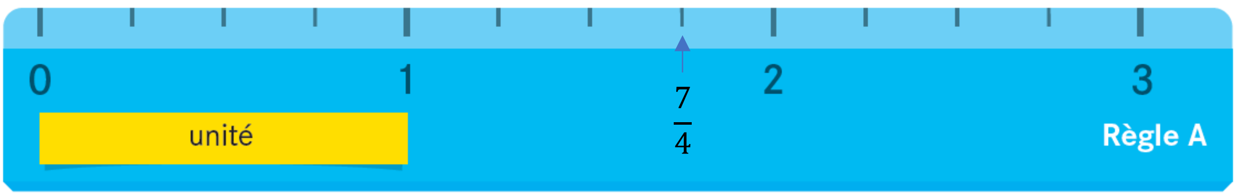


7 parts coloriées sur 8 parts apparentes ($\frac{7}{8}$) alors que le nombre de tarte représenté est $1 + \frac{3}{4}$ c'est à dire $\frac{7}{4}$

L'approche que nous présentons évite cet écueil et permet aussi aux élèves de comprendre ce que signifie « prendre $\frac{7}{4}$ d'une quantité ou d'un nombre » : prendre les $\frac{7}{4}$ de 20 revient à partager 20 en 4 parts égales (donc de valeur 5) et à assembler 7 parts de cette valeur (donc $\frac{7}{4}$ de 20 est égal à 35).

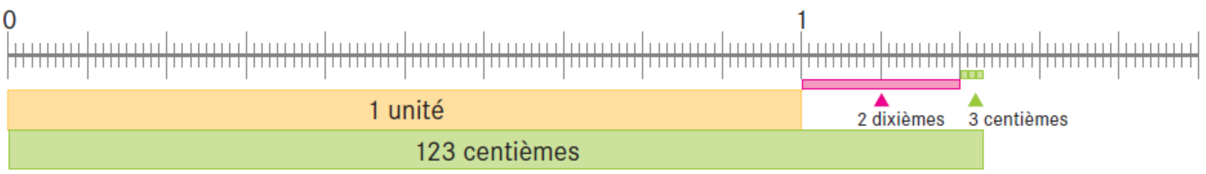
Cette compréhension de la fraction s'appuie sur une mise en relation effective entre représentation figurée (figure construite en reportant 7 fois la part obtenue en partageant une figure unité en 4 parts identiques), désignation verbale (sept quarts) et désignation symbolique ($\frac{7}{4}$).

Capmaths CM1 propose de la construire par un travail sur les longueurs, mené dans la continuité de celui du cycle 2, en proposant d'effectuer des mesures ou de construire des segments de mesures données, d'abord par report de partages d'une bande unité, puis à l'aide de règles graduées en fractions de cette unité.
L'usage de ces instruments oblige à lier expression d'une mesure non entière et repérage d'un point sur une ligne graduée et contribue à donner à la fraction un statut de nombre décontextualisé



Cette double approche permet d'illustrer des égalités de fractions simples ou des décompositions de fractions en une somme d'unités et d'une fraction inférieure à un, qui en les appliquant aux fractions décimales permettent d'engager le travail sur les nombres décimaux et de montrer qu'ils peuvent, comme les entiers, se décomposer en unités de numération.

Exemple avec $\frac{123}{100}$:



123 centièmes = 100 centièmes + 20 centièmes + 3 centièmes
= 1 unité + 2 dixièmes + 3 centièmes

$$\frac{123}{100} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100}$$

centaines (100)	dizaines (10)	unités (1)	dixièmes $\left(\frac{1}{10}\right)$	centièmes $\left(\frac{1}{100}\right)$
		1	2	3

← $\frac{123}{100}$