L'apprentissage du calcul dans le domaine additif : addition, soustraction

Au CM1, les élèves mobilisent un **certain nombre de résultats construits au cycle 2** et en consolident la mémorisation :
– ceux du **répertoire additif** (addition de 2 nombres inférieurs à 10) qui sont également utilisés **pour produire des doubles**, répondre rapidement à des questions portant sur des compléments (combien faut-il ajouter à 6 pour obtenir 11 ?) ou des soustractions comme 11 – 6, mais aussi pour effectuer des calculs portant sur des **nombres entiers de dizaines, centaines ou milliers.**
– les **compléments d'un nombre à la dizaine supérieure ; d'une dizaine entière à 100, d'une centaine entière à 1 000** (éléments clés pour le calcul réfléchi).
Les élèves doivent en fin d'année avoir étendu ces connaissances aux nombres décimaux pour être capables de produire rapidement des résultats (notamment avec des nombres exprimés en dixièmes) dans les mêmes types de calcul et en particulier **savoir donner le complément d'un décimal au nombre entier supérieur.**

Du point de vue du **calcul réfléchi, mental ou en ligne,** ils doivent être capables de faire des calculs additifs ou soustractifs, en mobilisant des **propriétés de l'addition et de la soustraction** aussi bien sur les nombres entiers que sur des nombres décimaux. Les calculs concernent en particulier des nombres inférieurs à 100 ou, dans des cas simples, des nombres plus grands (comme par exemple, 146 + 8) ou des nombres décimaux (comme par exemple 2,7 + 1,3).

Concernant le **calcul posé**, Au CM1, les élèves **renforcent leur maitrise des techniques** de calculs posés en colonnes pour l'addition et la soustraction de deux nombres entiers, vues au cycle 2. Ils **étendent ces techniques aux nombres décimaux.**

Les problématiques liées au **sens de ces opérations** sont traitées à partir de la page 10.

L'extension du répertoire additif aux nombres décimaux

L'utilisation du répertoire additif pour produire rapidement des résultats sur les nombres décimaux et en mémoriser certains est **le fruit d'un processus** dont les aspects peuvent être précisés ainsi :

- **Certains faits numériques construits sur le modèle des entiers sont facilement mémorisés :** ainsi dans 0,3 + 0,5 = 0,8 on retrouve 3 + 5 = 8, en effet 3 dixièmes + 5 dixièmes = 8 dixièmes.
- **Cette apparente similitude peut constituer un obstacle pour l'acquisition d'autres faits :** 0,6 + 0,6 par exemple n'est pas égale à 0,12 et 0,2 + 0,03 n'est pas égale à 0,5.
Cette acquisition est davantage liée à la prise de conscience de la nature décimale des nombres écrits avec une virgule (voir hatier-clic.fr/CM1capgcompl02) **:** valeur des chiffres dans cette écriture et relations entre unités de numération (1 unité = 10 dixièmes, 1 dixième = 10 centièmes). Ainsi 0,2 + 0,03 traités en prenant appui sur la numération décimale (2 dixièmes + 3 centièmes) est égale à 0,23 et 0,6 + 0,6 (6 dixièmes + 6 dixièmes) à 12 dixièmes ou 10 dixièmes + 2 dixièmes donc à 1 unité et 2 dixièmes ou 1,2.
Une **lecture signifiante des écritures à virgule** (*une unité deux dixièmes* ou *douze dixièmes* pour 1,2) rappelle et ancre leur nature décimale. Elle en donne une expression en unités de numération que les élèves peuvent additionner ou soustraire en utilisant leurs connaissances construites sur les entiers et facilite ainsi l'extension du répertoire.
- **Avant d'être mémorisés, certains résultats sont souvent d'abord reconstruits,** en prenant appui sur un résultat connu et sur une propriété de l'addition.
Exemple : 0,7 + 0,9 obtenu par 0,7 + 0,3 + 0,6 (passage par 1), par 0,7 + 0 ,7 + 0,2 (appui sur le double de 0 ,7) ou par 0,9 + 0,1 + 0,6 (changement de l'ordre des termes et passage par 1) ou encore en passant par les unités de numération : 7 dixièmes + 9 dixièmes = 16 dixièmes = 10 dixièmes + 6 dixièmes = 1 unité + 6 dixièmes = 1,6. Dans tous les cas, la propriété d'associativité de l'addition et parfois celle de commutativité sont mobilisées implicitement.
Ce travail de reconstruction de résultats, qui relève du calcul réfléchi, est facilité dans le cas des nombres décimaux par la capacité à **retrouver rapidement le complément d'un décimal non entier au nombre entier supérieur.**

• **L'entrainement, à partir d'exercices variés (interrogation orale, jeux, logiciels interactifs…) est nécessaire,** mais reste insuffisant si les autres aspects ne sont pas travaillés.

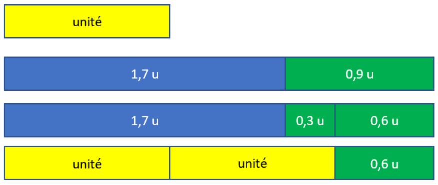
Les interrogations sur le répertoire sont du type *six dixièmes plus quatre dixièmes ? Combien pour aller de six dixièmes à un ? Que faut-il ajouter à six dixièmes pour obtenir une unité ? un moins six dixièmes ?*

■ Le calcul réfléchi, mental ou en ligne

Une caractéristique essentielle du calcul réfléchi est que, pour un même calcul, il existe toujours plusieurs procédures possibles. Prenons par exemple 120 – 78. Une procédure souvent enseignée (voire imposée) consiste à soustraire 80, puis ajouter 2. Elle est bien entendu valide, mais d'autres procédures sont possibles :
– chercher ce qu'il faut ajouter à 78 pour obtenir 120 en passant par exemple par 80 puis 100. Dans ce cas, le calcul soustractif est remplacé par un calcul additif : compléments de 78 à 80, puis de 80 à 100 et enfin de 100 à 120 ou directement de 80 à 120 ;
– on peut aussi soustraire 70 à 120, puis 8 à 50 ;
– il est également possible de calculer 122 – 80 en ajoutant 2 aux deux termes de la différence, procédure trop peu utilisée car trop peu enseignée…

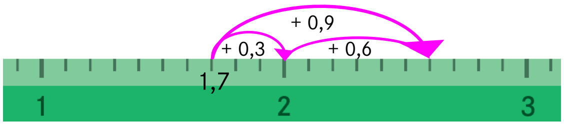
Le plus souvent, plusieurs procédures sont d'égale efficacité. Il est donc important de ne pas focaliser les élèves sur une seule procédure et d'inciter chaque élève à choisir une procédure qui lui convient, lui laisser un temps suffisant pour l'élaborer et la mener à bien, puis à en changer plus tard en fonction des calculs proposés.
Pour permettre aux élèves de s'approprier des procédures qu'ils n'ont pas imaginées, des temps doivent être consacrés à l'explicitation et à la verbalisation des procédures utilisées et à leur illustration par un écrit ou à l'aide d'un matériel. En effet, souvent, l'expression verbale des procédures gagne à être accompagnée par une illustration imagée qui peut faire référence à l'aspect cardinal des nombres (quantités), à leur aspect mesure ou à leur aspect ordinal (ligne numérique).
Exemple : calcul de 1,7 + 0,9 en passant par 2 0,9 est décomposé en 0,3 + 0,6 ce qui conduit au calcul 1,7 + 0,9 = 1,7 + (0,3 + 0,6) = (1,7 + 0,3) + 0,6 = 2 + 0,6 = 2,6.

Aspect mesure (de longueur)



Une nouvelle unité est fabriquée avec « 0,7 de 1,7 » et « 0,3 de 0,9 ».

Aspect ordinal



Le calcul réfléchi diffère du calcul posé. En particulier, il se déroule souvent « de gauche à droite » alors que le calcul posé se déroule de « droite à gauche ». Ainsi, mentalement ou en ligne, pour calculer *six-cent-vingt plus trois-cent-quatre-vingts*, on commence plutôt par *six-cents plus trois-cents égale neuf-cents*, puis *vingt plus quatre-vingts égale cent* et, enfin, *neuf-cents plus cent égale mille*. Les élèves en difficulté en calcul mental sont parfois des élèves qui n'utilisent pas de telles procédures, mais qui posent l'opération dans leur tête. D'où l'importance de ne pas mettre en place prématurément des techniques de calcul posé qui pourraient avoir un effet négatif sur l'élaboration de procédures de calcul mental.

L'efficacité du calcul réfléchi repose à la fois sur des faits numériques mémorisés et sur des stratégies.
Celles-ci consistent très souvent à décomposer un ou plusieurs des nombres en jeu dans le calcul, puis à recomposer les nombres obtenus, de façon à aboutir à un calcul plus simple que celui donné initialement. Ces stratégies résident en fait dans l'utilisation des **propriétés des opérations** qui, pour les élèves, sont utilisées en acte. Elles n'ont pas à être nommées, mais à partir des calculs traités l'enseignant peut mettre en évidence et verbaliser dans un langage adapté ce qu'il est possible de réaliser avec chaque opération. Ainsi, à l'occasion du calcul de 122 – 78 envisagé précédemment,

l'enseignant peut souligner qu'il est possible d'ajouter un même nombre aux deux termes d'une différence et obtenir ainsi une différence qui lui est égale, pour évoquer la propriété de l'écart constant.
Au CM1, les principales propriétés utilisées sont :
– **la commutativité de l'addition** : le calcul de 19 + 74 peut être remplacé par celui de 74 + 19 (on peut changer l'ordre des termes) ;
– **l'associativité de l'addition** : 93 + 17 = 93 + (7 + 10) = (93 + 7) + 10, ce qui justifie un calcul par ajouts successifs (on peut grouper les termes comme on veut) ;
– le fait **qu'ajouter une différence revient à ajouter son 1er terme, puis à soustraire son 2e terme** :
96 + 18 = 96 + (20 – 2) = (96 + 20) – 2 ;
– le fait **que soustraire une somme revient à soustraire successivement chacun de ses termes** :
93 – 17 = 93 – (10 + 7) = (93 – 10) – 7 ;
– Le fait que **soustraire une différence revient à soustraire son premier terme et à ajouter ensuite son deuxième terme au résultat** : 93 – 17 = 93 – (20 – 3) = (93 – 20) + 3 ;
– La **propriété de l'écart constant** : en ajoutant ou en soustrayant un même nombre aux deux termes d'une différence, on obtient une différence qui lui est égale :
93 – 17 = (93 + 3) – (17 + 3) = 96 – 20.

Les calculs peuvent progressivement, au cycle 3, être comme ici exprimés en ligne avec des parenthèses. Mais les formulations verbales et des représentations (une ligne numérique, arbre de calcul, matériel) aident à leur compréhension.

Le calcul approché

La pratique du calcul approché commence à être enseignée au CM1 pour faire des estimations ou contrôler le résultat d'un calcul posé ou instrumenté.
Elle présente plusieurs sources de difficultés. Il faut calculer sur des arrondis dont le choix dépend de la précision souhaitée, de la facilité de calcul qu'ils procurent. Ces choix d'arrondis ne sont donc pas systématiques et il peut même arriver que, après une série d'arrondis à une valeur supérieure, il soit préférable d'arrondir un nombre à une valeur inférieure à celle qui correspond à son « arrondi normal ».
C'est par exemple le cas quand on veut fournir une estimation à la dizaine près de 16 + 27 + 37 + 48 où la somme des arrondis des termes à la dizaine supérieure donne une approximation trop éloignée du résultat exact (140 pour 128).
Ce type de calcul est donc insécurisant pour les élèves.
Nous consacrons quelques séquences d'apprentissage à ce type de calcul qui, par ailleurs, peut et doit être sollicité en toutes occasions où le résultat d'un calcul doit être contrôlé.

Le calcul posé

Aujourd'hui, même s'il n'est pas nul, l'intérêt pratique des **techniques de calcul posé** est moindre de ce qu'il était avant la vulgarisation de l'usage des calculatrices.
Mais leur intérêt pédagogique et culturel demeure : leur étude permet de renforcer chez les élèves la connaissance des nombres, de la numération décimale et des propriétés des opérations, à condition que leur apprentissage vise la compréhension des mécanismes à l'œuvre dans leur exécution. C'est aussi l'occasion d'initier les élèves à la pensée algorithmique qui consiste à imaginer des processus valides quelles que soient les spécificités des nombres en présence et qui marque la différence fondamentale entre calcul posé et calcul réfléchi.

Les algorithmes de l'addition et de la soustraction mis en place pour les nombres entiers (des tutos de ces algorithmes sont accessibles à partir du MIE Cap Maths CM1) se prolongent facilement au cas des nombres décimaux donnés en écritures à virgule… C'est d'ailleurs l'une des raisons historiques de l'invention de ces écritures, il y a environ 400 ans.
La principale difficulté tient au fait que le repérage de la valeur des chiffres qui se faisait à partir de la droite pour les nombres entiers se fait à partir de la virgule pour les nombres décimaux, ce qui implique une modification de la disposition des nombres dans un calcul en colonnes.
Dans ces dispositions il arrive parfois qu'un chiffre se trouve seul dans sa colonne. Ceci peut constituer une difficulté supplémentaire en particulier dans le cas de soustraction comme 56,1 – 18,47 où le chiffre correspondant au rang des centièmes dans 56,1 n'apparait pas.

L'essentiel des explications est donc lié à la compréhension de ces écritures à virgule (voir hatier-clic.fr/CM1capgcompl02). Celle-ci s'appuie sur la décomposition des nombres en unités de numération (unité, dixièmes, centièmes) qui s'inscrit dans la continuité du système positionnel d'écriture chiffrée des entiers

La notion de retenue prend sens, en raisonnant sur ces décompositions, en faisant appel aux équivalences entre unités de numération : 0,3 + 0,8 c'est *trois dixièmes plus huit dixièmes* donc *onze dixièmes ou une unité et un dixième* car dix dixièmes font une unité.

De même le calcul 56,1 – 18,47 peut être ramené à la forme 56,10 – 18,47, similaire au cas des entiers, parce que 56,1 c'est *56 et 1 dixième* donc *56 et 10 centièmes* car 1 dixième vaut 10 centièmes.

Il est essentiel, pour que ces calculs soient compris, de les illustrer sur du matériel et de les formuler en langage verbal avant d'envisager de les présenter sous forme symbolique en écriture fractionnaire ou à virgule. Nous proposons dans le manuel plusieurs séquences d'apprentissage à cet effet.

■ Le calcul instrumenté

Les calculatrices sont utilisées lorsque c'est pertinent, donc au choix de l'enseignant. Elles sont particulièrement utiles lorsque, dans un problème qui comporte des données numériques de grande taille, on souhaite mettre l'accent sur la démarche de résolution ; elles permettent alors de soulager l'élève de l'effectuation des calculs eux-mêmes.

Plusieurs modèles existent, dont les spécificités peuvent faire l'objet d'une étude avec les élèves. Cela concerne la présence ou non de touches « parenthèses », ce qui fournit l'occasion de travailler sur les règles d'usage des parenthèses.

L'apprentissage du calcul dans le domaine multiplicatif : multiplication, division

Au CM1, les élèves :
– confortent et consolident la **mémorisation des tables de multiplication** ;
– mémorisent les **quatre premiers multiples de 25 et de 50** et les **critères de divisibilité par 2, 5 et 10** ;
– apprennent à **multiplier et à diviser par 10 des nombres décimaux**, puis à les **multiplier par 100 et 1 000.**

Du point de vue du **calcul réfléchi, mental ou en ligne**, ils doivent être capables de faire des calculs multiplicatifs, en mobilisant en particulier des **propriétés de la multiplication**. Ils doivent être également capables de vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant un **ordre de grandeur**.

En calcul posé, ils maitrisent une technique **de multiplication posée en colonne** et apprennent à poser **la division euclidienne de deux nombres entiers.**

Les problématiques liées au **sens de ces opérations** sont traitées à la page 11 de ce document « le sens des opérations – champ multiplicatif ».

La mémorisation des tables de multiplication

La mémorisation de résultats ou de procédures relatifs à la multiplication est le fruit d'un processus long amorcé dès le CE1 et qui doit être poursuivi jusqu'à la fin de l'école primaire.
Quelques caractéristiques peuvent en être précisées.

- **Certains faits numériques sont mémorisés plus rapidement que d'autres**, notamment les résultats des tables de 2, 5 ou 4 ou certains carrés.
- **Certains faits sont davantage liés à la prise de conscience d'une propriété** de l'opération, qui permet de les obtenir, qu'à un effort de mémorisation : multiplication par 0 ou par 1.
- **Avant d'être mémorisé, un résultat est souvent d'abord reconstruit**, en prenant appui sur un résultat connu et sur une propriété de la multiplication. Même si le répertoire des résultats mémorisés s'accroit, cela reste nécessaire pour certains élèves. Ainsi, si 8 × 7 n'est pas connu, il peut être retrouvé. Par exemple, à partir de 7 × 7 = 49, il est possible de tenir le raisonnement : 8 fois 7, c'est 7 fois 7 plus 1 fois 7, donc 49 + 7 = 56. Il est aussi possible, à partir de 4 × 7 = 28, de considérer que 8 × 7 est le double de 28.

> Cependant, contrairement à l'addition, où une partie seulement du répertoire peut être mémorisée permettant la reconstruction instantanée des résultats de l'autre partie, le répertoire multiplicatif doit être plus complètement mémorisé pour être efficace et permettre par exemple le calcul d'une division.

- **L'entrainement enfin joue un rôle essentiel et doit faire l'objet d'un travail quotidien.** Il peut relever d'activités collectives (procédé La Martinière, par exemple), individuelles (sur papier ou sur écran) ou par équipes (jeux).

Les interrogations sur le répertoire doivent être diverses et évoluent notamment en fonction du vocabulaire maitrisé par les élèves à l'approche de la division : *8 fois 6 ? Combien de fois 6 dans 48 ? Par quel nombre faut-il multiplier 6 pour obtenir 48 ? 48 est combien de fois plus grand que 6 ? 48 divisé par 6 ? Combien de fois 6 dans 50 ? 50 divisé par 6 ?*

> Les questions du type « combien de fois 6 dans 50 ? » ou « 50 divisé par 6 ?» sont celles qui se posent au moment du calcul d'une division euclidienne. Elles demandent à l'élève de savoir situer le nombre à diviser par rapport à un multiple du diviseur qui lui est proche et inférieur. Ceci nécessite de très bien connaitre les tables de multiplication.

Multiples et critères de divisibilité par 2, 5 et 10

Les élèves découvrent la notion de multiple. Des déplacements à partir de 0, par bonds réguliers, sur la bande numérique permettent de l'illustrer et d'en donner une première définition opérationnelle : un nombre est multiple d'un autre s'il se trouve dans **sa table de multiplication** ou dans son prolongement.
Les régularités observées dans l'écriture du dernier chiffre de la suite des nombres multiples de 2, 5 ou 10 permettent de dégager les premiers critères de divisibilité. Ils servent à la construction de décompositions

multiplicatives sur lesquelles on pourra en particulier s'appuyer pour mener du calcul réfléchi.

Multiplication et division par 10

Au cycle 2, les élèves ont appris à multiplier un entier par 10 en appliquant la « règle des 0 » qui revient à accoler un 0 à la droite de l'écriture chiffrée du nombre à multiplier. Formulée ainsi cette règle n'est plus valide pour les nombres décimaux écrits avec une virgule. Cependant une approche raisonnée en lien avec la numération décimale, permet de faire prendre conscience aux élèves que **multiplier un nombre par 10 revient à donner à chacun de ces chiffres une valeur 10 fois plus grande**. Cette approche menée sur des entiers (à partir du CE1 dans Cap Maths) peut être prolongée aux décimaux. Elle amène à constater, quand on multiplie un nombre décimal par 10, ce n'est pas la virgule qui se déplace d'un rang vers la droite, mais **chaque chiffre du nombre qui se déplace vers la gauche d'un rang** dans le tableau de numération, donc par rapport à la virgule.

EXPLICITATION, VERBALISATION

- En observant les résulats des quatre items, faire remarquer aux élèves que :
  – avancer 10 fois de 2 unités revient à avancer de 2 dizaines ;
  – avancer 10 fois de 3 dixèmes revient à avancer de 3 unités ;
  – avancer 10 fois de 4 centièmes revient à avancer de 4 dixèmes d'unité ;
  – avancer 10 fois de 2 unités 3 dixèmes 4 centièmes revient à avancer 10 fois de 2 unités puis 10 fois de 3 dixièmes puis 10 fois de 4 centièmes, c'est-à-dire de 2 dizaines 3 unités et 4 centièmes.
- Rappeler en synthèse que chacun de ces constats illustre la multiplication d'un nombre par 10 et les présenter dans un tableau de numération :

Multiplication d'un nombre décimal par 10

Milliers	Centaines	Dizaines	Unités ,	Dixièmes	Centièmes
			2	3	4
		2	3	4	

- Quand on multiplie un nombre par 10, les chiffres de son écriture à virgule changent de valeur, ils prennent une valeur 10 fois plus grande.
  → Ils sont donc décalés d'un rang vers la gauche par rapport à la virgule.

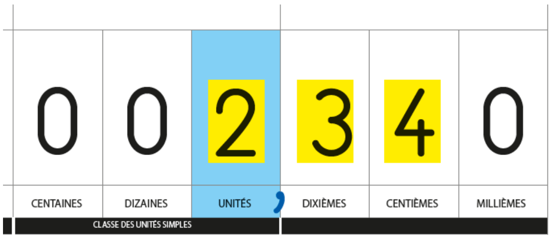
Guide p. 251

Ainsi, comme le montre la synthèse ci-dessus, conduite avec les élèves à la suite d'une activité de recherche, sur l'exemple de 2,34 × 10, on part de *2 unités 3 dixièmes 4 centièmes* pris 10 fois, ce qui donne 20 unités 30 dixièmes 40 centièmes

donc, comme 10 unités = 1 dizaine,
10 dixièmes = 1 unité et
10 centièmes = 1 dixième,
2 dizaines 3 unités et 4 dixièmes

Cette compréhension fondamentale, illustrée par des déplacements sur un axe gradué en centièmes et exposée avec le glisse-nombres (tableau de numération sur lequel les cartons-chiffres peuvent être déplacés), est installée pour la multiplication par 10 d'un décimal à deux chiffres après la virgule. Elle permettra ensuite d'**accéder aux procédures de division par 10 ou de multiplication par 100 ou 1 000** qui seront à consolider au CM2.

Glisse-nombres



Le calcul réfléchi, mental ou en ligne

Comme pour l'addition ou la soustraction, une caractéristique essentielle du calcul réfléchi est que, pour un même calcul, il existe toujours plusieurs procédures possibles. Prenons l'exemple du calcul de 15 × 12, plusieurs procédures sont envisageables :
– l'une d'elles consiste à décomposer 12 en 10 + 2 et à considérer que 12 fois 15, c'est 10 fois 15 plus 2 fois 15, donc 150 + 30 = 180.
– une autre consiste à considérer que 12 fois 15, c'est 6 fois « 2 fois 15 », donc 6 fois 30, donc 180 ;
– certains peuvent également penser que 15 × 12 est égal à la moitié de 30 × 12...

Souvent, plusieurs procédures sont d'égale efficacité. Il est donc important de ne pas focaliser les élèves sur une seule procédure et d'inciter chaque élève à choisir une procédure qui lui convient, lui laisser un temps suffisant pour l'élaborer et la mener à bien, puis à en changer plus tard en fonction des calculs proposés.
Pour permettre aux élèves de s'approprier des procédures qu'ils n'ont pas imaginées, des temps doivent être consacrés à l'explicitation et à la verbalisation des procédures utilisées et

à leur illustration par un écrit ou à l'aide d'un matériel.

Le calcul réfléchi diffère du calcul posé. En particulier, il se déroule souvent « de gauche à droite » alors que le calcul posé se déroule de « droite à gauche ». Pour calculer *quinze multiplié par six* en décomposant *quinze* en *dix plus cinq,* on calcule le plus souvent d'abord *six fois dix* égale *soixante*, puis *six fois cinq* égale *trente* et, enfin, *soixante plus trente égale quatre-vingt-dix*.
Les élèves en difficultés en calcul mental sont souvent des élèves qui posent l'opération dans leur tête. D'où l'importance de ne pas mettre en place prématurément des techniques de calcul posé qui pourraient avoir un effet négatif sur l'élaboration de procédures de calcul mental.

L'efficacité du calcul réfléchi repose à la fois sur des faits numériques mémorisés et sur des stratégies.
Celles-ci consistent très souvent à décomposer un ou plusieurs des nombres en jeu dans le calcul, puis à recomposer les nombres obtenus, de façon à aboutir à un calcul plus simple que celui donné initialement. Ces stratégies s'appuient sur des **propriétés des opérations** que les élèves utilisent en acte. Elles n'ont pas à être nommées, mais à partir des calculs traités l'enseignant peut mettre en évidence et verbaliser dans un langage adapté ce qu'il est possible de réaliser avec chaque opération.
Ainsi, à l'occasion par exemple du calcul de 25 × 12, l'enseignant peut souligner que comme 12 c'est 6 fois 2, il est possible de calculer 6 fois 2 fois 25 en calculant d'abord 2 fois 25 et en multipliant le résultat obtenu par 6, pour évoquer la propriété d'associativité de la multiplication.
Au CM1, les principales propriétés utilisées sont :
– la **commutativité de la multiplication** :
25 × 12 peut être pensé comme 25 fois 12 ou comme 12 fois 25 ;
– la **distributivité de la multiplication sur l'addition** :
12 fois 25, c'est 10 fois 25 plus 2 fois 25 ;
– l'**associativité de la multiplication** :
12 fois 25, c'est (3 fois 4) fois 25 ou 3 fois (4 fois 25), donc 3 fois 100.
– le fait que **diviser une somme revient à diviser chaque terme de la somme** (en prêtant attention au fait que le reste doit être inférieur au diviseur) : pour diviser 72 par 6, on peut décomposer 72 en 60 + 12, puis additionner les quotients de 60 et 12 par 6 (quotient 10 + 2 = 12) ;
– le fait que **dans le cas d'une division exacte, diviser par un produit revient à diviser successivement par chaque facteur du produit** : 90 divisé par 6 peut être calculé comme 90 divisé par 3 × 2, donc avec la suite de calculs 90 : 3 = 30, puis 30 : 2 = 15.
La mise en relation de diverses expressions des procédures utilisées dans les registres figurés, verbaux et symboliques est essentielle pour soutenir la compréhension de ces procédures et faire ressortir les propriétés mobilisées, voir exemple en annexe 1, p. 16.

■ Le calcul approché

La pratique du calcul approché commence à être enseignée au CM1 pour faire des estimations ou contrôler le résultat d'un calcul posé ou instrumenté.
Elle présente plusieurs difficultés. Il faut calculer sur des arrondis dont le choix dépend de la précision souhaitée, de la facilité de calcul qu'ils procurent. Ces choix d'arrondis ne sont donc pas systématiques et il peut même arriver que, après une série d'arrondis à une valeur supérieure, il soit préférable d'arrondir un nombre à une valeur inférieure à celle qui correspond à son « arrondi normal ». Ainsi, dans l'estimation du produit de 16 par 16, arrondir un des deux facteurs à la dizaine inférieure permet d'obtenir une estimation plus précise du résultat que celle calculée avec les arrondis à la dizaine supérieure (20 × 10 est plus proche de 256 que 20 × 20).
Cette difficulté est renforcée avec les calculs multiplicatifs où une approximation trop large pour un des facteurs peut avoir des conséquences sur l'approximation du résultat. Par exemple, arrondir à la centaine près les facteurs 165 et 58 pour en estimer le produit conduit à une approximation très éloignée du résultat (200 × 100 soit 20 000 pour 9 570).
Ce type de calcul est donc insécurisant pour les élèves mais il peut et doit être sollicité en toutes occasions où le résultat d'un calcul doit être contrôlé.

Le calcul posé

La technique traditionnelle de la **multiplication posée en colonnes** a été abordée en CE2. Elle est reprise en CM1 en insistant sur la compréhension des mécanismes mis en œuvre par la mise en évidence des propriétés utilisées en acte.

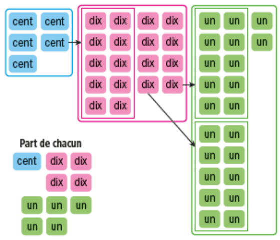
Calcul posé : 426 × 334

426	
× 334	
1704	← a. 426 × 4
12780	← b. 426 × 30 = 426 × 3 × 10
127800	← c. 426 × 300 = 426 × 3 × 100
142284	

Ainsi dans le calcul posé de 426 par 324 c'est la distributivité de la multiplication sur l'addition qui justifie la présence des trois lignes de calculs intermédiaires. Pour être comprise des élèves, cette propriété est formulée à l'aide du mot « fois » : « calculer 334 fois 426, c'est calculer, d'abord 4 fois 426, puis encore 30 fois 426, et encore 300 fois 426 ».
De même la propriété d'associativité de la multiplication permet par exemple de justifier la présence du 0 sur la seconde ligne de calcul : « comme 30 c'est 10 fois 3, calculer 30 fois 426, revient à calculer 10 fois 3 fois 426, donc à multiplier par 10 le résultat de 3 fois 426 ».

La disposition usuelle de la **technique de division** en potence est un élément culturel (d'autres dispositions sont en effet possibles… et utilisées dans d'autres pays). Nous avons choisi de la présenter dans un problème de partage équitable où on recherche la valeur d'une part, et de prendre appui sur les connaissances des élèves en numération pour en expliquer les différentes étapes et les illustrer sur du matériel. L'algorithme est vu comme une suite de partages successifs d'unités de numération qui composent le dividende, en commençant par celles de plus haut rang et où les unités restantes sont converties à chaque étape en unités de numération de rang inférieur.

Par exemple la division de 582 par 4 se fait en plusieurs étapes :



5 8 2	4
− 4	1 4 5
1 8	
− 1 6	
2 2	
− 2 0	
2	

1. Partage de <u>5 centaines</u> par 4.
Cela revient soit à diviser 5 en 4, soit à chercher combien de fois 4 est contenu dans 5 (→ 1 fois). Donc le résultat du partage est 1 centaine (ce qui signifie que le quotient comportera 3 chiffres) et il reste 1 centaine à changer en 10 dizaines.
2. Partage des <u>18 dizaines</u> en 4 (10 dizaines + 8 dizaines de 582).
Cela revient soit à diviser 18 en 4, soit à chercher combien de fois 4 est contenu dans 18 (→ 4 fois). Le résultat du partage est donc 4 dizaines (au quotient) et il reste 2 dizaines à changer en 20 unités.
3. Partage des <u>22 unités</u> en 4 (20 unités + 2 unités de 582).
Cela revient soit à diviser 22 en 4, soit à chercher combien de fois 4 est contenu dans 22 (→5 fois). Le résultat du partage est donc 5 unités (au quotient) et il reste 2 unités.

Avec un diviseur supérieur à 10, la technique de division peut être reprise mais elle beaucoup plus difficile à mettre en œuvre. En effet, pour diviser par exemple 5 194 par 15, la connaissance des tables de multiplication n'est plus suffisante pour trouver le résultat du partage de 51 centaines en 15 en effectuant 51 divisé par 15 ou en cherchant combien de fois 15 est contenu dans 51. La réponse nécessite d'utiliser un calcul approché et de maitriser le calcul réfléchi relatif au domaine multiplicatif, ce qui n'est pas le cas de tous les élèves. Pour cette raison nous suggérons de leur faciliter le travail en leur donnant en appui quelques multiples du diviseur ou en leur suggérant de les calculer eux-mêmes.

5 194 divisé par 15

Multiples de 15
15 × 2 = 30
15 × 3 = 45
15 × 4 = 60
15 × 5 = 75
15 × 6 = 90
15 × 7 = 105

5 1 9 4	1 5
− 4 5	3 4 6
6 9	c d u
− 6 0	
9 4	
− 9 0	
4	

Dans ce calcul on utilise :
– Le produit 15 × 3 = 45 pour déterminer le chiffre des centaines du quotient.
– Puis le produit 15 × 4 = 60 pour déterminer celui des dizaines.
– Enfin le produit 15 × 6 = 90 pour déterminer celui des unités.

Le calcul instrumenté

Les calculatrices sont utilisées lorsque c'est pertinent, donc au choix de l'enseignant.
Elles sont particulièrement utiles lorsque, dans un problème qui comporte des données numériques de grande taille, on souhaite mettre l'accent sur la démarche de résolution ; elles permettent alors de soulager l'élève de l'effectuation des calculs eux-mêmes.
Plusieurs modèles existent dont les spécificités peuvent faire l'objet d'une étude avec les élèves. Cela concerne la **présence ou non de touches « parenthèses »**, ce qui fournit l'occasion de travailler sur les **règles d'usage des parenthèses,** mais aussi la **présence ou non d'une touche dédiée à la division euclidienne,** qui fournit directement le quotient et le reste entiers.

Le sens des opérations : quel apprentissage ?

Champ additif

Ce document explicite les propositions de Cap Maths pour le champ additif, c'est-à-dire les problèmes qui relèvent du sens de l'addition et de la soustraction. On y précise les catégories de problèmes pour lesquels le recours à un calcul élémentaire[1] a été enseigné au cycle 2 et doit être entretenu au cycle 3, ceux pour lesquels ce recours fait l'objet d'un apprentissage spécifique au CM1 et ceux qui sont proposés aux élèves en vue d'une résolution personnelle utilisant des procédures variées (*cf.* typologie des problèmes du champ additif, en annexe)
Concernant des problèmes dont on peut attendre à un moment de la scolarité la résolution rapide par un calcul élémentaire, il est important de souligner que certains élèves ne peuvent encore en donner qu'une résolution personnelle. La priorité reste de les encourager à résoudre les problèmes proposés, sans perdre de vue que l'exploitation de solutions diverses, leur explicitation et leur mise en relation peut les aider à progresser vers l'utilisation de l'opération la plus appropriée.
La typologie donnée en annexe pour le champ additif est inspirée de celle élaborée par Gérard Vergnaud. Elle ne concerne que les types de problèmes envisagés au CM (voir annexe 2).

■ Les catégories de problèmes qui peuvent être résolus rapidement par un calcul élémentaire dès le début du cycle 3

Pour l'addition et la soustraction, au cycle 2, le recours à un calcul élémentaire a été explicitement travaillé pour presque tous les types de problèmes, avec des données entières. Seuls les problèmes relatifs à la composition de 2 transformations n'ont pas fait l'objet d'un apprentissage organisé, mais ils ont cependant été proposés aux élèves et résolus par des procédures personnelles.

Le travail sur tous les types de problèmes se poursuit tout au long du cycle 3, avec des nombres plus grands ou avec des nombres décimaux, dans divers domaines de grandeurs (longueurs, masses, contenances, durées, aires).

Pour certains types de problèmes, le recours à un calcul élémentaire doit d'ailleurs être consolidé au CM1. Cela concerne notamment les problèmes de comparaison. Au CM1, on s'assure que les élèves ont compris **qu'une différence n'est pas modifiée si on ajoute ou soustrait un même nombre à chacun de ces termes**. On vise également **la maitrise des expressions « … de plus » ou « … de moins »** en les différenciant des expressions « … fois plus » ou « … fois moins ».

Selon les catégories de problèmes, le recours à un calcul élémentaire est immédiat pour certains élèves. Il nécessite une reformulation du problème pour d'autres élèves ou encore n'intervient qu'après qu'un schéma leur a permis de bien comprendre la situation. Pour d'autres élèves encore, le recours à des procédures plus personnelles est encore nécessaire. Cela peut dépendre de la taille des nombres en jeu, des grandeurs évoquées, de la formulation de l'énoncé, de la familiarité avec le contexte…
Dans tous les cas, au moment de l'exploitation collective, le calcul additif ou soustractif est explicité et mis en relation avec d'autres procédures éventuellement utilisées.

Certains problèmes relatifs à la composition de transformations peuvent maintenant être résolus rapidement sans qu'un apprentissage spécifique soit nécessaire, notamment dans le cas où 2 transformations de même signe sont en jeu. D'autres problèmes de cette catégorie nécessiteront pendant longtemps encore un temps de recherche important pour être résolus, même par des adultes. Il s'agit de problèmes qui font intervenir deux transformations de signes contraires comme le dernier problème cité dans les tableaux en annexe 2.

[1] Pour les catégories de problèmes envisagés, on appelle ici calcul élémentaire un calcul à 2 termes (parfois 3).

Le sens des opérations : quel apprentissage ?

Champ multiplicatif : multiplication et division

Ce document explicite les propositions de Cap Maths pour le champ multiplicatif, c'est-à-dire les problèmes qui relèvent du sens de la multiplication et de la division. On y précise les catégories de problèmes pour lesquels le recours à un calcul élémentaire[2] fait l'objet d'un apprentissage spécifique au CM1 et ceux qui sont proposés aux élèves en vue d'une résolution personnelle utilisant des procédures variées (*cf.* typologie des problèmes du champ multiplicatif, en annexe)
Les problèmes dont on peut attendre la résolution par un calcul élémentaire au CM1 sont relatifs à la multiplication et à la division, avec des données entières.
Pour ceux qui sont relatifs à la proportionnalité, leur résolution se fait par des raisonnements appropriés et contextualisés (voir p. 14).
La typologie donnée en annexe 3 pour le champ multiplicatif est inspirée de celle élaborée par Gérard Vergnaud.

Dès le CE1, les élèves ont appris à résoudre par un calcul élémentaire (une multiplication), les problèmes relevant de deux catégories, avec des valeurs entières :
– Les problèmes où **on cherche une valeur totale suite à la réunion de plusieurs valeurs identiques**, problèmes codés (*cf.* typologie des problèmes du champ multiplicatif, en annexe 3).

grandeur 1		grandeur 2
1	→	a
b	→	c

– Les problèmes où on cherche **la valeur d'une quantité d'objets placés en configuration rectangulaire,** en lignes et colonnes identiques.

Pour ces deux catégories de problèmes, lorsqu'on cherche la valeur d'une part suite à un partage équitable ou le nombre de parts dans une situation de groupements identiques ou encore le nombre de lignes ou de colonnes nécessaires au remplissage d'une configuration rectangulaire, les élèves ont eu recours à des procédures mobilisant les 3 opérations connues (addition, soustraction, multiplication). En fin de CE2, ils commencent, dans certains cas, à reconnaitre que la division permet d'obtenir la réponse cherchée.

Le CM1 occupe une place essentielle dans la mise en place de la division euclidienne en tant que quatrième opération, avec des difficultés spécifiques pour la construction du sens de cette opération. Pour beaucoup d'élèves, la division est d'abord l'opération qui permet de trouver la valeur de chaque part à la suite d'un partage équitable, par exemple lorsque « *6 pirates se répartissent 74 pépites* ». En quelque sorte, diviser, c'est partager. Ce sens de la division, plus tôt compris, peut constituer un obstacle pour l'accès à d'autres sens de cette opération, notamment lorsqu'il s'agit de trouver le nombre de parts obtenues lorsqu'on réalise des groupements identiques d'objets, par exemple lorsqu'une fermière se demande « *combien de boites de 6 œufs on peut remplir avec 74 œufs ?* ». La reconnaissance du fait qu'une même opération, la division, peut notamment être associée à ces deux catégories de problèmes ne va pas de soi et suppose un travail didactique. Au départ, la résolution des deux problèmes qui viennent d'être cités mobilise des procédures qui ne sont pas totalement identiques, comme le montre les exemples du tableau suivant (d'autres procédures sont possibles).

[2] Pour les catégories de problèmes envisagés, on appelle ici calcul élémentaire un calcul à 2 termes (parfois 3).

	Problème de partage équitable	Problèmes de groupements identiques
	6 pirates se répartissent équitablement 74 pépites. ***Quelle est la part de chacun ?***	*Une fermière range 74 œufs dans des boites de 6 œufs.* ***Combien de boites peut-elle remplir ?***
Dessin, schéma	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺ o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o Etc. Distribution des pépites de un en un ou de deux en deux, puis **dénombrement de la part** de chaque pirate.	[o o o / o o o] [o o o / o o o] Etc. Dessin de boites de 6 œufs jusqu'à en avoir utilisé le plus possible ou dessin des 74 œufs et regroupements par 6, puis **dénombrement des boites de 6** obtenues.
Addition	7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 42 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 72 Essais de sommes de 6 nombres égaux pour atteindre 74 ou s'en approcher le plus possible, la réponse est donnée par l'un des nombres ajoutés (ici 12).	6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 72 Ajout systématique de 6 pour atteindre 74 ou s'en approcher le plus possible. La réponse est donnée par le nombre de 6 ajoutés.
Soustraction	74 − 6 = 68 ; 68 − 6 = 62 Etc. Examen de ce qui reste après avoir donné une pépite à chacun, jusqu'à ne plus avoir de pépites à distribuer, la réponse est donnée par le nombre de 6 soustraits, en considérant que chaque 6 correspond à une pépite donnée à chacun. Cette procédure est difficile, en particulier pour l'interprétation de chaque calcul.	74 − 6 = 68, 68 − 6 = 62 Etc. Examen de ce qui reste après avoir rempli 1 boite, puis 2 boites, jusqu'à ne plus pouvoir remplir de boites, la réponse est donnée par le nombre de 6 soustraits, en considérant que chaque 6 correspond à une boite. Cette procédure semble identique à celle de gauche, mais la signification de chaque soustraction n'est pas identique et l'interprétation de chaque calcul est ici plus facile.
Multiplication	6 × ... = ? ou ... × 6 = ? avec recherche d'un résultat égal ou inférieur à 74, mais le plus proche possible. Raisonnement consistant à se dire que 6 fois la part de chacun doit épuiser la quasi-totalité des pépites	... × 6 = ? ou 6 × ... = ? avec recherche d'un résultat égal ou inférieur à 74, mais le plus proche possible. Raisonnement consistant à se dire que tant de fois (à trouver) 6 œufs doit épuiser la quasi-totalité des pépites

Comme on le voit, les raisonnements ne sont jamais totalement identiques. Dès lors que les élèves conçoivent la multiplication comme commutative, **c'est le recours à une multiplication à compléter qui est le mieux à même d'unifier ces deux types de problèmes et de donner sens à la division.** C'est d'ailleurs à partir de là, considérant le reste, qu'on écrira l'égalité caractéristique de la division euclidienne :
74 = (**6** × 12) + 2 ou **74** = (12 × **6**) + 2 en s'assurant que 2 < 6.

Dans Cap Maths, les deux types de problèmes font l'objet d'un travail explicite, en insistant sur la relation entre division et multiplication. Cette relation est prolongée par le travail fait en calcul mental. En effet, un calcul comme « 36 divisé par 2 » est avantageusement pensé comme « partager 36 en 2 parts égales » (aspect « partage » de la division) alors qu'un calcul comme « 36 divisé par 12 » est plus avantageusement pensé comme « combien de fois 12 dans 36 ? » (aspect « groupement » de la division).

La division euclidienne de 74 par 6 peut ainsi être caractérisée comme l'opération qui permet de déterminer le nombre qui multiplié par 6 donne le résultat égal ou inférieur à 74 et aussi proche que possible de 74 (le quotient de la division), ainsi que la différence entre ce résultat et 74 (le reste de la division qui est donc inférieur à 6).

Le sens construit pour la multiplication et cette caractérisation de la division permet de traiter la plupart des problèmes relevant des autres catégories, notamment ceux relatives à des **configurations rectangulaires** ou des **situations de comparaison multiplicative** (voir typologie en annexe). Les problèmes relevant de **situations de type « produit cartésien »** demeurent, pour l'essentiel, des problèmes pour chercher pour lesquels le recours à un calcul rapide n'est pas envisagé au cycle 3.

La question d'un symbole opératoire pour la division euclidienne fait débat. Le résultat d'une division euclidienne n'est pas un nombre, mais un couple de nombres (quotient, reste). Une notation du type 74 : 6 = 12, reste 2 n'est pas acceptable car elle n'est pas compatible avec l'usage du symbole = … où les termes placés de part et d'autre doivent avoir la même valeur. La solution la plus raisonnable est de ne pas avoir de symbole pour la division euclidienne et de réserver le symbole : au cas où le reste est égal à 0.
Pour 74 divisé par 6, on écrit donc
$74 = (6 \times 12) + 2$.
Pour 72 divisé par 6, on écrit
$72 = 6 \times 12$ et également $72 : 6 = 12$.
Cette solution a l'avantage de pouvoir être prolongée au cas du quotient décimal avec par exemple $74 : 4 = 18,5$ ou $74 : 6 \approx 12,33$ (pour un résultat approché au centième près).

Le sens des opérations : quel apprentissage ?

Champ multiplicatif : proportionnalité

Ce document explicite les propositions de Cap Maths pour l'étude de la proportionnalité. On y précise les catégories de problèmes qui sont proposés aux élèves (*cf.* typologie des problèmes du champ multiplicatif, en annexe) ainsi que les procédures envisagées pour leur résolution.

La typologie donnée en annexe 4 pour les problèmes de proportionnalité est inspirée de celle élaborée par Gérard Vergnaud qui les situe dans le champ multiplicatif (voir en annexe).

L'étude de la proportionnalité commence au cycle 3 et se poursuivra tout au long du collège. C'est donc dans ce temps long qu'il faut penser ce qui doit être appris à chaque niveau du cycle.
En allant à l'essentiel, **l'apprentissage de la proportionnalité au CM est organisé autour de trois raisonnements**, liés à des propriétés de la proportionnalité. Ces trois raisonnements fondamentaux suffisent à traiter toutes les situations de proportionnalité travaillées au CM1 et au CM2, y compris, au CM2, celles relatives aux pourcentages, aux vitesses constantes et aux échelles pour lesquelles des procédures spécifiques seront enseignées au collège.

Les deux premiers raisonnements sont illustrés ici à partir d'une situation de réglettes identiques mises bout à bout, le troisième à partir d'une situation relative aux échelles (notion abordée plutôt au CM2).

■ Premier raisonnement : Utilisation de la propriété de linéarité (aspect multiplicatif)

4 réglettes mises bout à bout ont une longueur totale de 6 cm. **Quelle est la longueur totale de 12 réglettes ?**

4 réglettes mesurent au total 6 cm.
12 réglettes, c'est 3 fois 4 réglettes,
donc 12 réglettes mesurent 3 fois 6 cm,
donc 18 cm (6 cm × 3 = 18 cm).

Le même raisonnement est utilisé pour la procédure dite « de passage par l'unité », en 2 étapes :

4 réglettes mesurent au total 6 cm.
donc 1 réglette mesure 1,5 cm (4 fois moins de cm que 4 réglettes) → 6 cm : 4 = 1,5 cm,
donc 12 réglettes mesurent 18 cm (12 fois plus de cm que 1 réglette)
→ 1,5 cm × 12 = 18 cm.

■ Deuxième raisonnement : Utilisation de la propriété de linéarité (aspect additif)

4 réglettes mises bout à bout ont une longueur totale de 6 cm.
12 réglettes mises bout à bout ont une longueur totale de 18 cm.
Quelle est la longueur totale de 16 réglettes ?

4 réglettes mesurent au total 6 cm.
12 réglettes mesurent au total 18 cm.
16 réglettes, c'est 4 réglettes ajoutées à 12 réglettes.
Donc 16 réglettes mesurent 18 cm plus 6 cm, donc 24 cm (18 cm + 6 cm = 24 cm).

■ Troisième raisonnement : Utilisation du coefficient de proportionnalité

1 cm sur le papier représente 2,5 m (ou 250 cm) dans la réalité (échelle 1/250).
Quelle est la longueur représentée par 2,4 cm sur le papier ?

1 cm représente 250 cm.
Donc la distance réelle (en cm) est 250 fois la distance sur le papier (en cm),
donc la distance représentée par 2,4 cm est 250 fois 2,4 cm, donc 600 cm
(2,4 cm × 250 = 600 cm).

Une attention particulière est portée à la reconnaissance des situations qui relèvent de la proportionnalité et de celles qui n'en relèvent pas, celles donc où les raisonnements précédents ne sont pas pertinents. Pour cela, les élèves doivent se référer soit à des connaissances sociales (le poids d'un individu n'est pas proportionnel à son âge, le prix d'un produit est proportionnel à la masse, souvent dans certaines limites), soit à des expériences proposées à l'école (le fait que le périmètre d'un cercle est proportionnel à son rayon peut être établi expérimentalement, indépendamment de la formule correspondante).

À propos de l'utilisation de tableaux de proportionnalité

Il peut paraitre commode d'utiliser un tableau pour traiter les problèmes relevant de cette notion (on parle de tableau de proportionnalité). Si cet usage n'est pas à proscrire, notamment pour mettre en forme une réponse, il doit être envisagé avec prudence.
En effet, il est plus facile pour un élève d'exprimer les étapes de son raisonnement dans un langage proche de ce qui est énoncé que sous une forme plus symbolique.
Prenons l'exemple du 1er problème envisagé résolu par « passage par l'unité ».

La mise en forme des données dans un tableau constitue une première tâche pour l'élève, difficile pour beaucoup d'entre eux si elle doit être réalisée en autonomie, par exemple sous la forme :

Nombre de réglettes	4	12
Longueur en cm	6	?

Pour une résolution par « passage par l'unité », l'élève doit modifier son tableau initial en y ajoutant une colonne… mieux placée au milieu qu'à droite du tableau !

Nombre de réglettes	4	1	12
Longueur en cm	6	?	?

Enfin, son raisonnement, de nature verbale au départ, doit être codifié en langage symbolique, par exemple sous la forme :

: 4 × 12

Nombre de réglettes	4	1	12
Longueur en cm	6	?	?

: 4 × 12

En comparant avec la description verbale donnée plus haut, on comprend que le recours au tableau ne peut pas être imposé comme un support de résolution obligé.
Des écrits comme les suivants sont plus efficaces pour de nombreux élèves et doivent précéder une mise en forme dans un tableau qui peut être réservée à la fin du cycle 3 :

4 réglettes mesurent au total 6 cm.
12 réglettes, c'est 3 fois 4 réglettes
donc 12 réglettes mesurent 3 fois 6 cm,
donc 18 cm (6 cm × 3 = 18 cm)
ou
4 réglettes → 6 cm
12 réglettes, c'est 3 fois 4 réglettes
12 réglettes → 3 × 6 cm = 18 cm

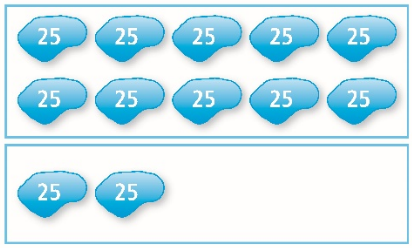
On pourrait penser que fournir un tableau en partie complété peut être une première étape vers une généralisation de son utilisation. Il faut alors être conscient que cela revient à faire une partie du travail dévolu à l'élève, notamment quant à l'identification des grandeurs en jeu et des valeurs qui se correspondent.

Annexe 1 Calcul 25 × 12

Procédure fondée sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition	Procédure fondée sur l'associativité de la multiplication

REGISTRES FIGURÉS

Registre des groupements itérés :
évocation schématisée de 12 groupements de 25 objets

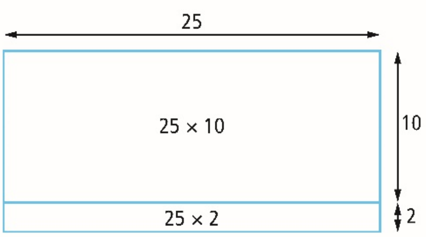


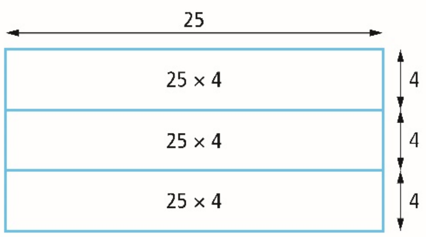
12 groupements de 25 objets décomposés en 10 groupements de 25 objets et 2 groupements de 25 objets.

12 groupements de 25 objets décomposés en 3 groupements de 4 groupements de 25 objets.

REGISTRES DES QUADRILLAGES

Évocation schématisée d'un rectangle de 25 carreaux sur 12 carreaux





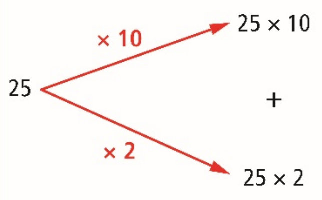
REGISTRES VERBAUX

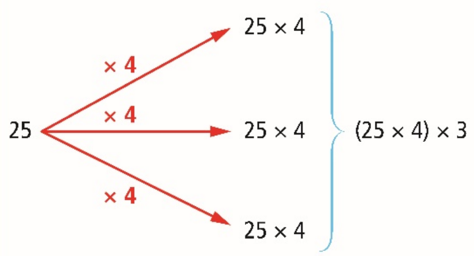
12 fois 25, c'est 10 fois 25 plus 2 fois 25

12 fois 25 c'est 3 fois « 4 fois 25 »

REGISTRES SYMBOLIQUES

Arbres de calcul





Calculs en ligne

$25 \times 12 = 25 \times (10 + 2) = (25 \times 10) + (25 \times 2)$

$25 \times 12 = 25 \times (4 \times 3) = (25 \times 4) \times 3$

Annexe 2 Typologie des problèmes du champ additif

Pour chaque type de problème, un exemple est fourni.

Il est important de noter qu'un même problème peut parfois être situé dans deux catégories différentes selon l'interprétation qui en est faite par le lecteur.

Le problème ci-contre est ainsi placé dans la catégorie « Composition de 2 transformations positives, avec recherche la transformation composée » (T^+ T^+ **T**), et peut être schématisé par :

> Zoé a gagné 13 billes ce matin, puis elle a encore gagné 7 billes cet après-midi. **Combien de billes a-t-elle gagné dans la journée ?**

$$\xrightarrow{\text{gain de 13 billes}} \quad \xrightarrow{\text{gain de 7 billes}}$$

$$\xrightarrow{\text{gain de ... billes}}$$

Il pourrait être aussi placé dans la catégorie « Combinaison, avec recherche de la totalité » (P1 P2 **T**) si le lecteur considère que la quantité de billes gagnées dans la journée (T) est composée des billes gagnées le matin (P1) et des billes gagnées l'après-midi (P2), et schématisé par :

$$\underbrace{\text{13 billes gagnées} \qquad \text{7 billes gagnées}}_{\text{... billes gagnées}}$$

Transformation (augmentation, diminution)

E_i : état initial T : transformation positive ou négative E_f : état final

E_i T^+ E_f	Transformation positive, recherche de l'état final	Alex a déjà 124 photos de Moustik. Lisa lui donne 87 nouvelles photos de Moustik. **Combien de photos de Moustik Alex a-t-il maintenant ?**
E_i T^+ E_f	Transformation positive, recherche de l'état initial	Pendant la nuit, 6 nouveaux champignons ont poussé dans le pré. Il y a maintenant 15 champignons dans le pré. **Combien de champignons y avait-il dans le pré hier soir ?**
E_i T^+ E_f	Transformation positive, recherche de la valeur de la transformation	Au début de la récréation, Lisa avait 11 billes. À la fin de la récréation, elle en a 18. **Combien de billes Lisa a-t-elle gagnées pendant la récréation ?**
E_i T^- E_f	Transformation négative, recherche de l'état final	Lisa a acheté une boite de 18 chocolats. Elle donne 12 chocolats à Alex. **Combien de chocolats lui reste-t-il ?**
E_i T^- E_f	Transformation négative, recherche de l'état initial	Alex a joué aux billes pendant la récréation. Il a perdu 7 billes. Maintenant, il a 13 billes. **Combien de billes Alex avait-il avant la récréation ?**
E_i T^- E_f	Transformation négative, recherche de la valeur de la transformation	En arrivant à l'école, le matin, Zoé a 65 billes. À midi, elle n'en a plus que 52. **Combien de billes Zoé a-t-elle perdues le matin ?**

Combinaison (réunion de 2 parties ou plus)

P_1 : première partie P_2 : deuxième partie T : totalité

P_1 P_2 T	Recherche de la totalité	Sur un parking, il y a 10 voitures blanches et 7 voitures noires. **Combien de voitures y a-t-il sur le parking ?**
P_1 P_2 T	Recherche d'une partie	Dans un pré, il y a 25 moutons. 15 moutons sont blancs, tous les autres sont noirs. **Combien de moutons noirs y a-t-il dans le pré ?**

Comparaison de 2 quantités ou de 2 grandeurs

g : grandeur la plus petite

C : comparaison positive (de plus) ou négative (de moins)

G : grandeur la plus grande

g G C^+	Comparaison positive, recherche de la plus grande valeur	Lisa a 188 perles. Zoé en a 72 de plus que Lisa. **Combien de perles Zoé a-t-elle ?**
g G C^+	Comparaison positive, recherche de la plus petite valeur	Léo mesure 124 cm. Il mesure 10 cm de plus que José. **Combien de centimètres mesure José ?**
g G C^+	Comparaison positive, recherche de la valeur de la comparaison	Lisa a rangé 75 billes dans une boite rouge et 60 billes dans une boite bleue. Il y a plus de billes dans la boite rouge que dans la boite bleue. **Combien de plus ?**
g G C^-	Comparaison négative, recherche de la plus grande valeur	Aïcha et Lou font des châteaux avec des cubes. Aïcha a utilisé 25 cubes. Elle a utilisé 10 cubes de moins que Lou. **Combien de cubes Lou a-t-elle utilisés ?**
g G C^-	Comparaison négative, recherche de la plus petite valeur	Le matin, Moustik a mangé 32 croquettes. Le soir, il a mangé 5 croquettes de moins que le matin. **Combien de croquettes a-t-il mangées le soir ?**
g G C^-	Comparaison négative, recherche de la valeur de la comparaison	Lundi, Zag a ramassé 30 brindilles. Mardi, elle a ramassé 25 brindilles. Elle en a moins ramassé le mardi que le lundi. **Combien de moins ?**

Composition de 2 transformations

T^+ : transformation positive

T^- : transformation négative

T : transformation composée (signe donné ou à déterminer)

Tous les types de problèmes possibles ne sont pas envisagés dans le tableau qui suit. Ils sont en effet très nombreux puisqu'il faut prendre en compte la valeur absolue des transformations.

T^+ T^+ T T^- T^- T	Composition de 2 transformations de même signe, recherche de la transformation composée	Zoé a gagné 13 billes ce matin, puis elle a encore gagné 7 billes cet après-midi. **Combien de billes a-t-elle gagnées dans la journée ?**
T^+ T^+ T T^- T^- T	Composition de 2 transformations de même signe, recherche de l'une des transformations.	Sophie a perdu 13 billes ce matin, puis elle a encore joué cet après-midi. Dans la journée, elle a perdu 22 billes. **Que s'est-il passé l'après-midi ?**
T^+ T^- T	Composition de 2 transformations de signes contraire, recherche de la transformation composée	Louise a gagné 15 billes ce matin, puis elle en a perdu 7 l'après-midi. **Quel est le bilan de la journée ?**
T^+ T^- T T^+ T^- T	Composition de 2 transformations de signes contraire, recherche de l'une des transformations.	José a gagné 7 billes ce matin. Il a rejoué l'après-midi. À la fin de la journée, il remarque qu'il a perdu 15 billes. **Que s'est-il passé l'après-midi ?**

Annexe 3 Typologie des problèmes du champ multiplicatif

Pour chaque type de problème, un exemple est fourni.

Réunion de plusieurs parts égales (grandeurs ou quantités identiques)

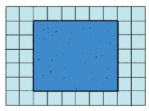
a : valeur d'une part b : nombre de parts c : valeur totale

1 → a b → c	Recherche de la valeur totale	Alex a ramassé des champignons. Il les a mis dans 4 sacs. Dans chaque sac, il y a 5 champignons. **Combien de champignons Alex a-t-il ramassés ?**
1 → a b → c	Recherche de la valeur d'une part	Arthur range ses 30 photos de footballeurs dans un album. Il colle le même nombre de photos sur chaque page. Il a rempli 5 pages. **Combien de photos Arthur a-t-il collées sur chaque page ?**
1 → a b → c	Recherche du nombre de parts	Pour son anniversaire, Lisa veut acheter 36 chocolats. Les chocolats sont vendus par sachets de 2. **Combien de sachets doit-elle acheter ?**

Ces situations sont un cas particulier de situations de proportionnalité, lorsqu'on connait la valeur associée à 1.

Configuration rectangulaire (lignes et colonnes régulières, aires de rectangles)

l : nombre de lignes c : nombre de colonnes T : nombre total d'objets

l c T	Recherche du nombre total d'objets	Les élèves de l'école ont tracé un quadrillage sous le préau. Pour préparer un jeu, Alex a posé une grande serviette sur le quadrillage.  **Combien de carrés y a-t-il sur tout le quadrillage tracé par les élèves ? (**
l c T ou l c T	Recherche du nombre de lignes ou du nombre de colonnes	Un jardin rectangulaire a une aire de 72 m². Il mesure 9 m de long. **Quelle est sa largeur ?**

Produit cartésien

n : nombre d'occurrences d'une donnée nombre d'occurrences de l'autre donnée T : nombre total de possibilités

n p T	Recherche du nombre total de possibilités	Un restaurant propose un repas de midi avec 4 plats et 3 desserts au choix. **Combien de menus différents composés d'un plat et d'un dessert peut-on choisir ?**
n p T ou n p T	Recherche d'une des occurrences	Un restaurant propose un repas de midi avec 4 plats et des desserts. Il souhaite que ses clients puissent avoir le choix entre 12 menus différents composés d'un plat et d'un dessert. **Combien de desserts différents doit-il proposer ?**

Comparaison multiplicative

G1 : première grandeur G2 : deuxième grandeur C^m : comparaison du type « ... fois plus », « triple »

C^d : comparaison du type « ... fois moins, « tiers »

G1 G2 C^m	Comparaison de type « fois plus », recherche de la valeur multipliée	Lisa a 45 perles. Zoé en a trois fois plus (ou le triple de ce qu'a Zoé). **Combien de perles Zoé a-t-elle ?**
G1 G2 C^m	Comparaison de type « fois plus », recherche de la valeur à multiplier	Lisa a 45 perles. Elle en a trois fois plus que Zoé (ou le triple de ce qu'a Zoé). **Combien de perles Zoé a-t-elle ?**
G1 G2 C^m	Comparaison de type « fois plus », recherche de la multiplication	Lisa a 12 perles. Zoé en a 36. **Combien Zoé a-t-elle de fois plus de perles que Lisa ?**
G1 G2 C^d	Comparaison de type « fois moins », recherche de la valeur divisée	Lisa a 45 perles. Zoé en a trois fois moins (ou le tiers de ce qu'a Zoé). **Combien de perles Zoé a-t-elle ?**
G1 G2 C^d	Comparaison de type « fois moins », recherche de la valeur à diviser	Lisa a 45 perles. Elle en a trois fois moins que Zoé (ou le tiers de ce qu'a Zoé). **Combien de perles Zoé a-t-elle ?**
G1 G2 C^d	Comparaison de type « fois moins », recherche de la division	Lisa a 36 perles. Zoé en a 12. **Combien Zoé a-t-elle de fois moins de perles que Lisa ?**

Annexe 4 Typologie des problèmes relevant de la proportionnalité

Pour chaque type de problème, un exemple est fourni.

Proportionnalité simple

a et b : valeur d'une première grandeur n et p : valeur d'une deuxième grandeur

a → n b → p	Recherche d'une valeur pour la 2e grandeur	6 dictionnaires identiques pèsent ensemble 15 kg. **Quelle est la masse de 2 dictionnaires ?**
a → n b → p	Recherche d'une valeur pour la 1re grandeur	6 dictionnaires identiques pèsent ensemble 15 kg. **Combien de dictionnaires pèsent ensemble 30 kg ?**

Dans le cas particulier où a est égal à 1, on retrouve les problèmes de « réunion de plusieurs parts égales (grandeurs ou quantités identiques) » envisagés à la page 11 de ce document « Sens des opérations : multiplication et division ».

Comparaison de proportions

a et b : valeur d'une première grandeur n et p : valeur d'une deuxième grandeur

a n b p	Comparaison de 2 proportions	Dans un récipient A, on a mélangé 2 litres d'eau et 6 morceaux de sucre. Dans un récipient B, on a mélangé 6 litres d'eau et 10 morceaux de sucre. **Quel récipient contient l'eau la plus sucrée ?**
a n b p	Recherche de la valeur d'une grandeur	Dans un récipient A, on a mélangé 2 litres d'eau et 6 morceaux de sucre. Dans un récipient B, on a mis 6 litres d'eau. **Combien faut-il mettre de morceaux de sucre dans le récipient B pour que le mélange soit aussi sucré que celui du récipient A ?** Ce cas peut être vu comme un problème de proportionnalité simple.

D'autres catégories de problèmes relèvent davantage du collège, comme les **problèmes de double proportionnalité** qui peuvent cependant être proposés comme problèmes pour chercher.

Exemples :

Pour vider une cuve de 630 L, on utilise trois pompes. Chaque pompe retire 35 L d'eau en 2 minutes. **Combien de temps faut-il pour vider la cuve ?**

6 poules pondent 6 œufs en 6 jours. **Combien 12 poules pondent-elles d'œufs en 12 jours ?**