

Ce document explicite les principales orientations de Cap Maths dans le domaine Espace et géométrie pour aider à la compréhension et la mise en œuvre de nos propositions. Afin d'éclairer les enjeux des apprentissages en CM1, nous resituons ceux-ci dans le cursus de l'école au collège et décrivons l'apport des différents types de problèmes à ces apprentissages. Les activités pratiquées en CM1 relatives à l'espace, aux solides, à la géométrie dans le plan s'inscrivent dans la continuité du travail amorcé au cycle 2. Plus spécifiquement, les activités géométriques amplifient le travail conduit en cycle 2 en permettant aux élèves de passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont essentiellement contrôlés par la perception à une géométrie où le recours à des instruments devient déterminant.

■ Différents niveaux de géométrie

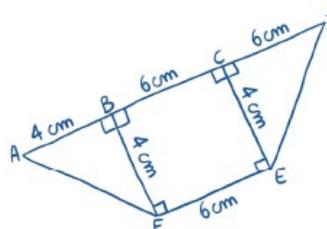
Les connaissances géométriques sont issues d'un savoir organisé en une théorie élaborée au cours de l'histoire dont le but est de résoudre des problèmes de l'espace physique rencontrés dans le cadre de pratiques professionnelles, sociales, artistiques ou autres.

Le cycle 3 marque une étape importante dans les apprentissages géométriques.

- En début de cycle 2, les objets sont reconnus perceptivement d'après leur forme, leur allure générale ; on se situe au niveau de la « **géométrie perceptive** ».
- En cycle 2, les élèves commencent à entrer dans la « **géométrie instrumentée** ». Ils sont en mesure d'affirmer qu'un quadrilatère est un carré car ils ont vérifié avec leurs instruments que ses quatre côtés ont même longueur et qu'il a quatre angles droits.
- En début de cycle 3, l'essentiel du travail se situe encore au niveau de cette géométrie où les objets sont identifiés par leurs propriétés qui sont contrôlées avec les instruments.
- En cycle 3, les élèves vont approcher un troisième niveau de géométrie : la « **géométrie déductive** ». Dans cette géométrie, la connaissance qu'ils ont des objets et des relations géométriques va leur permettre de déduire des informations de celles qui leur sont données soit pour engager une construction, soit pour déterminer une

mesure... En CM1, construire à partir d'un schéma codé marque l'entrée dans cette géométrie. Les propriétés de la figure ne pouvant pas être établies, ni contrôlées avec les instruments sur le schéma, elles doivent être déduites des informations portées par celui-ci en sollicitant des savoirs géométriques. Une étape supplémentaire sera franchie en CM2 où il sera par exemple demandé de déterminer une longueur en utilisant les informations portées par un schéma codé, sans construire la figure.

Exemple de problème de construction à partir d'un schéma



D'un point de vue perceptif, la figure semble constituée d'un carré et deux triangles rectangles

identiques. Ce sont les informations portées sur le schéma qui permettent de revenir sur cette perception de la figure.

Le quadrilatère a quatre angles droits, qui sont codés, et il est indiqué que ses côtés opposés ont même longueur. Ils mesurent respectivement 4 cm et 6 cm. C'est donc un rectangle, non carré.

Les deux triangles sont effectivement des triangles rectangles. Les angles droits sont codés. Mais les deux triangles ne sont pas identiques. Les deux côtés de l'angle droit du triangle ABF mesurent 4 cm alors que les côtés de l'angle droit du triangle DCE mesurent respectivement 4 cm et 6 cm.

– Progressivement, au **collège**, la « géométrie instrumentée » s'effacera pour céder la place à cette « **géométrie déductive** » qui nécessite une bonne connaissance des objets du plan et des relations géométriques.

■ La structuration de l'espace

Le travail de structuration s'effectue à travers d'une part, la **mise en place d'indicateurs spatiaux du langage** (sur, sous, devant, derrière, entre, près de, à gauche de, à droite de... pour indiquer un emplacement ; avancer, reculer, aller tout droit, tourner à gauche, tourner à droite... pour décrire un itinéraire) et d'autre part, **l'élaboration et l'utilisation de**

représentations planes de l'espace

(maquette, photographie, dessin plus ou moins épuré, plan ...). Il doit être mené en lien avec les domaines « Géographie » et « Éducation physique et sportive ».

En cycle 2, les élèves ont appris à se repérer dans un espace connu, passant de l'espace de la classe qu'il pouvait englober du regard à un espace plus vaste, celui de l'école et du quartier ou du village dans lequel il était nécessaire de se déplacer pour l'appréhender dans son ensemble. Ils ont également appris à mettre en relation un plan, une carte avec l'espace réel qu'ils représentent.

Ainsi en **CE2**, les élèves ont eu à s'orienter dans l'espace du quartier ou du village grâce à un plan, à mettre en congruence l'orientation de cet espace et celle du plan. Si l'enseignant le juge nécessaire, une telle situation peut être reprise avec les élèves de CM1 (*voir Cap maths CE2*).

Le travail se poursuit en CM1 en mettant l'accent sur la communication verbale d'un itinéraire et l'exploitation des informations transmises, situation à laquelle tout individu est confronté dans sa vie sociale. **La situation** que nous proposons nécessite de la part de l'émetteur de lire des informations sur le plan d'un espace vaste et inconnu, celui d'une ville, et de les communiquer à un récepteur, en se projetant à sa place et en anticipant la vision qu'il a de son environnement à chaque instant. Elle nécessite de la part du récepteur d'interpréter les informations qui lui sont transmises et donc de se projeter lui aussi à la place d'une personne déambulant dans la ville pour pouvoir reconstituer l'itinéraire décrit. **La contrainte pour l'émetteur de verbaliser l'itinéraire à suivre et la validation fournie par le récepteur qui exploite les informations reçues permettent de consolider la signification et l'utilité du langage spatial.**



Par exemple, pour indiquer un itinéraire à une personne voulant se rendre à la bibliothèque après avoir visité le musée Alpin, il faut imaginer cette personne dos au musée. La bibliothèque est donc située sur sa gauche, bien qu'étant située à droite du musée sur le

plan. L'indication à lui communiquer est alors : « En sortant du musée, prendre à gauche ». Arrivé place du Mont-Blanc, il a une rue sur sa gauche, une rue sur sa droite et une rue face à lui. L'indication est alors d'aller tout droit...

■ Les solides

En fin de cycle 2, les élèves ont une relativement bonne connaissance du cube et du pavé droit qu'ils savent reconnaître et décrire ou encore construire en assemblant des faces ou des tiges. Ils savent reconnaître une pyramide, la décrire à partir de ses faces. Une toute première approche de la notion de patron a été faite en CE2 : possibilité d'obtenir un cube à partir d'un assemblage de six carrés identiques correctement agencés.

En CM1, la connaissance des pyramides est consolidée et les élèves découvrent une nouvelle classe de polyèdres, les prismes droits qu'ils apprennent à reconnaître parmi d'autres polyèdres et à décrire.

La notion de patron fait l'objet d'une première étude avec la construction d'un patron d'un cube, d'un pavé droit. Ce travail sera repris et approfondi en CM2.

■ La géométrie plane

L'enseignement en cours moyen vise une **première maîtrise** des objets géométriques usuels et des relations élémentaires qui fondent la géométrie du collège, ainsi qu'une initiation au raisonnement, à l'argumentation. La construction des savoirs porte d'une part, sur des objets (rectangle, carré, triangle rectangle, losange, cercle...) qui se caractérisent par des propriétés dont l'éventail s'enrichit en CM1. C'est le cas :

- du parallélisme des côtés opposés du carré, du rectangle, du losange ;
- du rayon, du diamètre d'un cercle qui jusque-là désignaient des longueurs et qui sont vus comme étant également des segments. Un diamètre est une des plus grandes cordes qui a la particularité d'avoir pour milieu le centre du cercle.

La construction des savoirs porte d'autre part, sur les relations entre objets (alignement, angle de deux demi-droites, perpendicularité, parallélisme de deux droites, égalité de longueurs, symétrie axiale...), relations selon le cas entre des points, des droites, des segments, des figures.

Les relations sont utilisées pour établir les propriétés des figures. Ainsi, un rectangle a

ses côtés opposés parallèles et de même longueur, ses côtés consécutifs perpendiculaires, deux axes de symétrie qui sont les droites passant par les milieux des côtés opposés.

De nouveaux concepts sont introduits en CM1 :

- **droites perpendiculaires** (cf. angle droit) ;
- **droites parallèles** qui sont vues comme étant des droites qui « ni se rapprochent, ni s'éloignent l'une de l'autre », des **droites d'écartement constant** ;
- **l'angle** déterminé par deux demi-droites de même origine qui se caractérise par l'ouverture de ses côtés, indépendamment de leurs longueurs.

Si elle est facilement compréhensible, cette formulation n'est pas mathématiquement correcte.

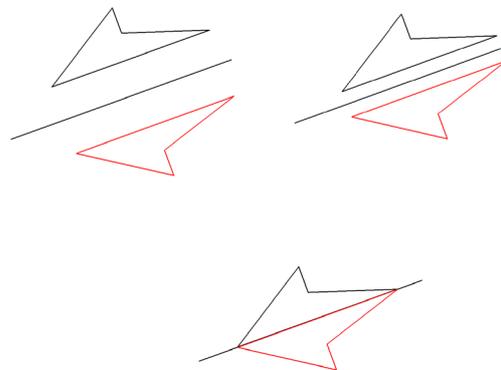
En effet, la figure formée par deux demi-droites de même origine est en fait un secteur angulaire, il s'agit d'un objet géométrique. Si deux secteurs angulaires sont superposables, on dit qu'ils ont même angle, au même titre qu'on dit de deux segments qui sont superposables qu'ils ont même longueur. L'angle est donc une grandeur, une propriété des secteurs angulaires, ce n'est pas un objet. Dans la pratique, à l'école primaire, on accepte l'abus de langage qui consiste à affirmer que « deux angles sont égaux s'ils sont superposables » ou à demander de « construire un angle égal à un angle donné ». En fait, nous devrions dire que « les angles sont égaux parce que les secteurs angulaires sont superposables » et demander de « construire un secteur angulaire ayant même angle qu'un secteur angulaire donné ». La lourdeur de ces formulations fait qu'on assimile à l'école la grandeur angle à l'objet géométrique qu'est un secteur angulaire, qui n'est qu'un représentant de l'angle.

D'autres concepts introduits en cycle 2 s'enrichissent de nouveaux aspects :

- **l'angle droit**, considéré jusque-là comme étant un « coin » du carré ou encore un « coin » de l'équerre, est perçu comme étant un angle particulier, « **quatre angles droits de même sommet recouvrent entièrement la feuille** » et déterminent deux droites qu'on nomme **droites perpendiculaires**. Il s'enrichit aussi d'une vision dynamique, celle de **quart de tour** mise en évidence dans le codage du déplacement d'un personnage à l'écran.

- **figures symétriques par rapport à une droite**. Deux figures sont symétriques par rapport à un axe si en pliant ou en imaginant plier autour de l'axe, les deux figures se superposent exactement. L'étude des positions relatives d'une figure et de son symétrique permet de dégager quelques propriétés de la symétrie axiale comme par exemple : deux figures symétriques sont identiques mais l'une est retournée par rapport à l'autre, elles sont à la même distance de l'axe et ont la même inclinaison par rapport à l'axe.

Le lien entre **figures symétriques par rapport à une droite** et **figure symétrique (figure ayant un axe de symétrie)**, aspect de la symétrie axiale travaillé au cycle 2, ne va pas soi. L'étude, avec l'apport possible d'un logiciel de géométrie dynamique, de l'évolution de la position d'une figure symétrique d'une figure donnée en fonction de la variation de la position de cette figure par rapport à l'axe, permet d'unifier ces deux aspects de la symétrie : une figure a un axe de symétrie s'il existe une droite qui détermine deux figures situées de part et d'autre de la droite telles que ces deux figures sont symétriques par rapport à cette droite.

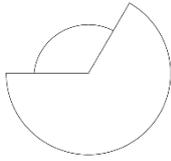


■ Problèmes et construction des savoirs et compétences

Les savoirs spatiaux et géométriques sont avant tout fonctionnels. Ils interviennent comme des outils, indispensables à la résolution de certains problèmes. L'utilisation d'un plan pour se repérer dans une ville en est un exemple. La notion d'angle en est une autre illustration. Dans certains problèmes de reproduction ou d'agrandissement, les procédures utilisant les longueurs sont inopérantes et l'angle se révèle alors être un outil adapté pour résoudre ces problèmes. La

plupart des savoirs mathématiques prennent ainsi sens en résolvant des problèmes.

Exemple de problème de reproduction



Les élèves ont à reproduire la figure ci-contre. Au CM1, ils ne disposent pas de la technique de construction d'un triangle à partir des longueurs de ses trois côtés, technique qui permettait après avoir tracé un segment, de déterminer avec précision la position de la seconde extrémité du deuxième segment. Ils doivent donc s'orienter vers le report de l'angle avec l'aide d'un gabarit ou de papier calque, qui permet de déterminer la position relative des deux segments et donc de reproduire la figure.

Les situations proposées dans Cap maths CM1 s'organisent essentiellement autour de cinq types de problèmes :

– Reconnaissance

- *Reconnaître un dessin comme étant celui d'une figure connue*, qui nécessite de connaître les propriétés de la figure et d'utiliser les instruments pour les contrôler ;
- *Identifier une figure à partir d'une description* qui met en jeu les mêmes connaissances et compétences, mais aussi la connaissance du vocabulaire et de la syntaxe géométriques

– Reproduction

qui nécessite :

- d'analyser la figure (repérer les éléments ou figures élémentaires qui la composent, les liens entre ces éléments) ;
- de définir un ordre dans lequel effectuer les tracés (en référence aux propriétés de la figure) ;
- de faire un choix d'instruments appropriés ;
- de mettre en place des contrôles aux différentes étapes de la construction.

– Description

- *Pour permettre à une autre personne de reconnaître une figure parmi d'autres* qui nécessite :
 - d'analyser la figure ;
 - de maîtriser le vocabulaire et les formulations géométriques.

- *Pour permettre à une autre personne de construire une figure identique*, qui sollicite les mêmes connaissances et compétences.

– Construction

- *À partir d'un programme de construction* qui nécessite :
 - de connaître le vocabulaire et la syntaxe géométriques ;
 - de connaître les propriétés des figures usuelles ;
 - d'associer des techniques de construction à des relations géométriques.
- *À partir d'une description* qui sollicite les mêmes connaissances et compétences mais aussi de définir un ordre dans lequel effectuer les tracés.
- *À partir d'un schéma codé* qui nécessite :
 - de distinguer la figure du dessin ;
 - de connaître les conventions de codage ;
 - d'opérer des déductions à partir des informations dont le schéma est porteur.

Dans le cas de la construction d'une figure à partir d'un programme de construction, il n'est pas nécessaire d'avoir une vision globale de la figure. La réussite est assurée si les connaissances et compétences mentionnées sont maîtrisées ; il suffit de se conformer au programme. Il n'en va pas de même dans le cas de la construction à partir d'une description. Il faut, à partir des informations données, se construire une image de la figure à obtenir. La réalisation d'un schéma à main levée, qui peut être griffonné et refait à moindre coût, peut constituer une aide avant la construction de la figure avec les instruments.

– Représentation

Selon l'espace dans lequel on travaille, les représentations prennent des formes bien différentes. Un schéma à main levée est une représentation d'une figure, une représentation en perspective celle d'un solide, un plan celle d'un espace plus ou moins vaste... Ces représentations ont en commun de ne retenir que certains éléments caractéristiques de l'objet ou de l'espace représenté, ceux qui sont estimés être nécessaires à la communication et utiles à l'accomplissement de certaines actions.

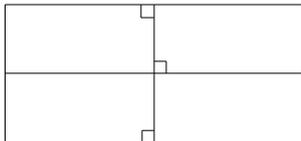
Les élèves vont avoir soit à produire, soit à utiliser de telles représentations. Mais quelle que soit la tâche qu'ils auront à réaliser, celle-ci nécessite de connaître les « règles » utilisées pour construire ces représentations.

■ Les instruments

L'objectif est d'amener les élèves à une utilisation raisonnée des instruments en fonction des propriétés qu'ils se proposent de vérifier ou d'utiliser. Pour cela, sauf indication contraire, les instruments sont à la libre disposition des élèves auxquels il incombe de choisir ceux qu'ils vont devoir utiliser en fonction du problème à résoudre et des propriétés sollicitées.

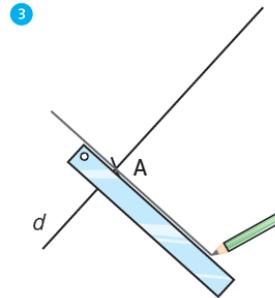
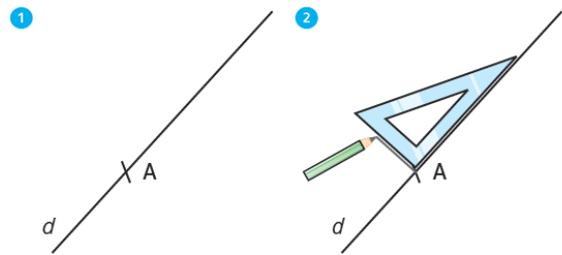
En CM1, il s'agit d'asseoir la maîtrise de la règle pour tracer des lignes droites, contrôler et utiliser des alignements, du double décimètre pour mesurer et reporter des longueurs ; de l'équerre pour contrôler et tracer un angle droit, du calque pour comparer ou reproduire des angles, du compas pour tracer un cercle. Il s'agit aussi de développer l'usage du compas pour reporter une longueur.

À côté de l'équerre, nous avons fait le choix d'introduire un nouvel instrument présent dans la « Mallette de matériel CM », la **réquerre** dont le nom est le condensé de règle-équerre. Elle est réalisée dans un matériau transparent et quelques angles droits sont codés.

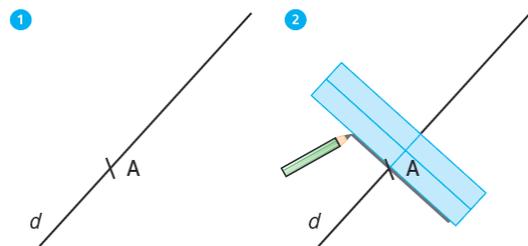


Comme le montrent les schémas ci-après la **réquerre facilite grandement le tracé d'une droite perpendiculaire à une droite donnée**. Il n'y a pas à combiner l'utilisation de deux instruments, la droite perpendiculaire est tracée en une seule fois.

Avec une équerre et une règle

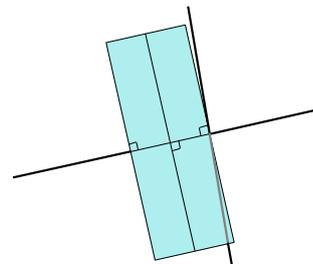


Avec une réquerre

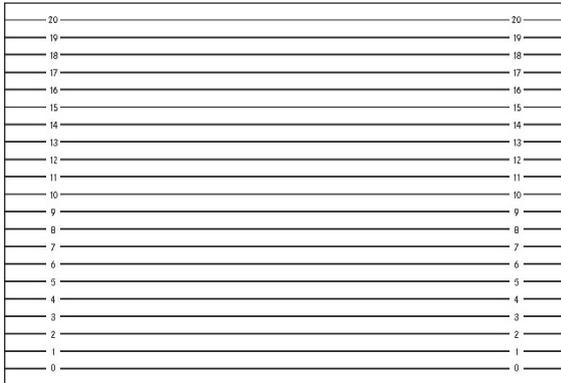


Pour vérifier si deux droites sont **perpendiculaires**, il suffit de faire coïncider un trait intérieur de la réquerre avec une des droites et amener un bord de la réquerre en contact avec le point d'intersection des deux droites. Il reste à apprécier la position de la deuxième droite par rapport à ce bord.

Avec une réquerre

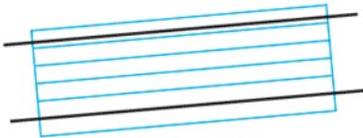


Un autre instrument est présent dans la « Mallette de matériel CM », il s'agit du **guide-âne**. Réalisé dans un matériau transparent, il se présente sous la forme d'un réseau de traits parallèles régulièrement espacés.

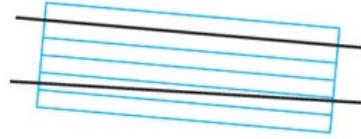


Le guide-âne permet d'apprécier si deux droites sont parallèles. Pour cela, il faut faire coïncider un trait du guide-âne avec une des deux droites et ensuite repérer la position de la deuxième droite par rapport aux traits du guide-âne.

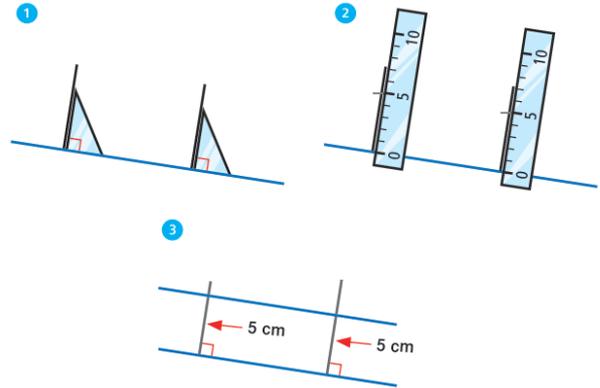
- si la droite coïncide avec un trait du guide-âne, les deux droites sont parallèles ;
- si la droite ne coïncide pas avec un trait du guide-âne mais que :
 - ni elle s'en écarte, ni elle s'en rapproche, les deux droites sont parallèles.



- elle s'écarte ou se rapproche d'un trait du guide-âne, les deux droites ne sont pas parallèles.



Le guide-âne ne dispense de savoir utiliser l'équerre et le double décimètre pour tracer une parallèle à une droite donnée ou pour s'assurer que deux droites sont parallèles.



Le guide-âne est plus simple d'utilisation pour apprécier le parallélisme. En effet, la fiabilité d'une estimation faite avec un guide-âne est au moins aussi bonne, voire meilleure, que celle de tracés de droites perpendiculaires et de mesures qui sont entachés d'une certaine imprécision, qui peut être importante si les élèves n'ont pas une bonne maîtrise de l'équerre et du double décimètre.

Développer la maîtrise des instruments, ainsi que des qualités de soin et de précision constitue un des objectifs de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et requiert qu'un temps suffisant soit consacré à des activités de construction et reproduction.